CHƯƠNG 1: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. Định nghĩa

Trên mặt phẳng Oxy cho đường tròn lượng giác tâm O bán kính R=1 và điểm M trên đường tròn lượng giác mà sđ $\overset{\frown}{AM} = \beta$ với $0 \le \beta \le 2\pi$

Đặt $\alpha = \beta + k2\pi, k \in Z$

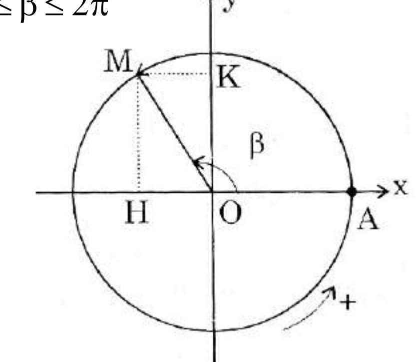
Ta định nghĩa:

$\sin\alpha = \overline{OK}$

$\cos\alpha = \overline{OH}$

$tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ với $\cos\alpha \ne 0$

$\cot g\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ với $\sin\alpha \ne 0$



II. Bảng giá trị lượng giác của một số cung (hay góc) đặc biệt

Góc α / Giá trị	$0(0^o)$	$\frac{\pi}{6}(30^o)$	$\frac{\pi}{4}(45^o)$	$\frac{\pi}{3}(60^o)$	$\frac{\pi}{2}(90^o)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	‖
$\cot g\alpha$	‖	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

III. Hệ thức cơ bản

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ với $\alpha \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in Z)$

$t + \cot g^2 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ với $\alpha \ne k\pi\,(k \in Z)$

IV. Cung liên kết (Cách nhớ: cos đối, sin bù, tang sai π; phụ chéo)

a. Đối nhau: α và $-\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$tg(-\alpha) = -tg(\alpha)$

$\cot g(-\alpha) = -\cot g(\alpha)$

b. Bù nhau: α và $\pi - \alpha$

$$\begin{aligned} &\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \\ &\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \\ &\mathrm{tg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha \\ &\mathrm{cotg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{cotg}\alpha \end{aligned}$$

c. Sai nhau π: α và $\pi + \alpha$

$$\begin{aligned} &\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \\ &\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \\ &\mathrm{tg}(\pi + \alpha) = \mathrm{tg}\alpha \\ &\mathrm{cotg}(\pi + \alpha) = \mathrm{cotg}\alpha \end{aligned}$$

d. Phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\begin{aligned} &\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \\ &\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \\ &\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{cotg}\alpha \\ &\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{tg}\alpha \end{aligned}$$

e.Sai nhau $\frac{\pi}{2}$: α và $\frac{\pi}{2} + \alpha$

$$\begin{aligned} &\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha \\ &\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha \\ &\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{cotg}\alpha \\ &\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{tg}\alpha \end{aligned}$$

f.

$$\sin(x+k\pi) = (-1)^k \sin x, k \in Z$$
$$\cos(x+k\pi) = (-1)^k \cos x, k \in Z$$
$$tg(x+k\pi) = tgx, k \in Z$$
$$\cot g(x+k\pi) = \cot gx$$

V. Công thức cộng

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$
$$tg(a \pm b) = \frac{tga \pm tgb}{1 \mp tgatgb}$$

VI. Công thức nhân đôi

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$
$$tg2a = \frac{2tga}{1 - tg^2 a}$$
$$\cot g2a = \frac{\cot g^2 a - 1}{2\cot ga}$$

VII. Công thức nhân ba:

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$
$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

VIII. Công thức hạ bậc:

$$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$$
$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$$
$$tg^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

IX. Công thức chia đôi

Đặt $t = tg\frac{a}{2}$ (với $a \neq \pi + k2\pi$)

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$tga = \frac{2t}{1-t^2}$$

X. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$
$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$
$$\sin a + \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$
$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$
$$tga \pm tgb = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}$$
$$\cot ga \pm \cot gb = \frac{\sin(b \pm a)}{\sin a.\sin b}$$

XI. Công thức biển đổi tích thành tổng

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a.\sin b = \frac{-1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

Bài 1: Chứng minh $\frac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1} = \frac{2}{3}$

Ta có:

$$\sin^4 a + \cos^4 a - 1 = \left(\sin^2 a + \cos^2 a\right)^2 - 2\sin^2 a\cos^2 a - 1 = -2\sin^2 a\cos^2 a$$

Và:

$$\sin^6 a + \cos^6 a - 1 = \left(\sin^2 a + \cos^2 a\right)\left(\sin^4 a - \sin^2 a\cos^2 a + \cos^4 a\right) - 1$$
$$= \sin^4 a + \cos^4 a - \sin^2 a\cos^2 a - 1$$
$$= \left(1 - 2\sin^2 a\cos^2 a\right) - \sin^2 a\cos^2 a - 1$$
$$= -3\sin^2 a\cos^2 a$$

Do đó: $\dfrac{\sin^4 a+\cos^4 a-1}{\sin^6 a+\cos^6 a-1}=\dfrac{-2\sin^2 a\cos^2 a}{-3\sin^2 a\cos^2 a}=\dfrac{2}{3}$

Bài 2: Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}=\left[1+\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}\right]$

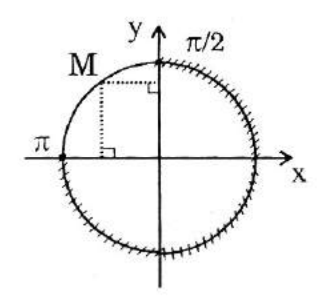
Tính giá trị A nếu $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$

Ta có: $A=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}\left(\dfrac{\sin^2 x+1-2\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$

$\Leftrightarrow A=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}.\dfrac{2(1-\cos x)}{\sin^2 x}$

$\Leftrightarrow A=\dfrac{2(1-\cos^2 x)}{\sin^3 x}=\dfrac{2\sin^2 x}{\sin^3 x}=\dfrac{2}{\sin x}$ (với $\sin x\neq 0$)

Ta có: $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$



Do: $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ nên $\sin x>0$

Vậy $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Do đó $A=\dfrac{2}{\sin x}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

Bài 3: Chứng minh các biểu thức sau đây không phụ thuộc x:

a. $A=2\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+3\sin^2 x$

b. $B=\dfrac{2}{\mathrm{tg}x-1}+\dfrac{\cot gx+1}{\cot gx-1}$

a. Ta có:

$A=2\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+3\sin^2 x$

$\Leftrightarrow A=2\cos^4 x-(1-\cos^2 x)^2+(1-\cos^2 x)\cos^2 x+3(1-\cos^2 x)$

$\Leftrightarrow A=2\cos^4 x-(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)+\cos^2 x-\cos^4 x+3-3\cos^2 x$

$\Leftrightarrow A=2$ (không phụ thuộc x)

b. Với điều kiện $\sin x.\cos x\neq 0, \mathrm{tg}x\neq 1$

Ta có: $B=\dfrac{2}{\mathrm{tg}x-1}+\dfrac{\cot gx+1}{\cot gx-1}$

$$\Leftrightarrow B=\frac{2}{tgx-1}+\frac{\frac{1}{tgx}+1}{\frac{1}{tgx}-1}=\frac{2}{tgx-1}+\frac{1+tgx}{1-tgx}$$

$$\Leftrightarrow B=\frac{2-(1-tgx)}{tgx-1}=\frac{1-tgx}{tgx-1}=-1 \text{ (không phụ thuộc vào x)}$$

Bài 4: Chứng minh

$$\frac{1+\cos a}{2\sin a}\left[1-\frac{(1-\cos a)^2}{\sin^2 a}\right]+\frac{\cos^2 b-\sin^2 c}{\sin^2 b\sin^2 c}-\cot g^2 b\cot g^2 c=\cot ga-1$$

Ta có:

$$* \ \frac{\cos^2 b-\sin^2 c}{\sin^2 b.\sin^2 c}-\cot g^2 b.\cot g^2 c$$

$$=\frac{\cot g^2 b}{\sin^2 c}-\frac{1}{\sin^2 b}-\cot g^2 b\cot g^2 c$$

$$=\cot g^2 b\left(1+\cot g^2 c\right)-\left(1+\cot g^2 b\right)-\cot g^2 b\cot g^2 c=-1 \quad (1)$$

$$* \ \frac{1+\cos a}{2\sin a}\left[1-\frac{(1-\cos a)^2}{\sin^2 a}\right]$$

$$=\frac{1+\cos a}{2\sin a}\left[1-\frac{(1-\cos a)^2}{1-\cos^2 a}\right]$$

$$=\frac{1+\cos a}{2\sin a}\left[1-\frac{1-\cos a}{1+\cos a}\right]$$

$$=\frac{1+\cos a}{2\sin a}.\frac{2\cos a}{1+\cos a}=\cot ga \quad (2)$$

Lấy (1) + (2) ta được điều phải chứng minh xong.

Bài 5: Cho ΔABC tùy ý với ba góc đều là nhọn.
Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=tgA.tgB.tgC$

Ta có: $A+B=\pi-C$

Nên: $tg(A+B)=-tgC$

$$\Leftrightarrow \frac{tgA+tgB}{1-tgA.tgB}=-tgC$$

$$\Leftrightarrow tgA+tgB=-tgC+tgA.tgB.tgC$$

Vậy: $P=tgA.tgB.tgC=tgA+tgB+tgC$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương tgA, tgB, tgC ta được $tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt[3]{tgA.tgB.tgC}$

$\Leftrightarrow P \geq 3\sqrt[3]{P}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{P^2} \geq 3$

$\Leftrightarrow P \geq 3\sqrt{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} tgA = tgB = tgC \\ 0 < A, B, C < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$

Do đó: $MinP = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$

Bài 6 : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

a/ $y = 2\sin^8 x + \cos^4 2x$

b/ $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x}$

a/ Ta có : $y = 2\left(\dfrac{1 - \cos 2x}{2}\right)^4 + \cos^4 2x$

Đặt $t = \cos 2x$ với $-1 \leq t \leq 1$ thì

$y = \dfrac{1}{8}(1 - t)^4 + t^4$

=> $y' = -\dfrac{1}{2}(1 - t)^3 + 4t^3$

Ta có : $y' = 0 \Leftrightarrow (1 - t)^3 = 8t^3$

$\Leftrightarrow 1 - t = 2t$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$

Ta có y(1) = 1; y(-1) = 3; $y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27}$

Do đó : $\underset{x \in \mathbb{R}}{Max}\, y = 3$ và $\underset{x \in \mathbb{R}}{Min}\, y = \dfrac{1}{27}$

b/ Do điều kiện : $\sin x \geq 0$ và $\cos x \geq 0$ nên miền xác định

$D = \left[k2\pi, \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right]$ với $k \in \mathbb{Z}$

Đặt $t = \sqrt{\cos x}$ với $0 \leq t \leq 1$ thì $t^4 = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Nên $\sin x = \sqrt{1 - t^4}$

Vậy $y = \sqrt[8]{1 - t^4} - t$ trên $D' = [0, 1]$

Thì $y' = \dfrac{-t^3}{2.\sqrt[8]{(1 - t^4)^7}} - 1 < 0 \quad \forall t \in [0; 1)$

Nên y giảm trên [0, 1]. Vậy : $\underset{x \in D}{\max}\, y = y(0) = 1,\ \underset{x \in D}{\min}\, y = y(1) = -1$

Bài 7: Cho hàm số $y=\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x-2m\sin x\cos x}$
Tìm giá trị m để y xác định với mọi x

Xét $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x-2m\sin x\cos x$

$f(x)=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-m\sin 2x-2\sin^2 x\cos^2 x$

$f(x)=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x-m\sin 2x$

Đặt : $t=\sin 2x$ với $t\in[-1,1]$

y xác định $\forall x \Leftrightarrow f(x)\ge 0\forall x\in R$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}t^2-mt\ge 0\ \ \forall t\in[-1,1]$

$\Leftrightarrow g(t)=t^2+2mt-2\le 0\ \ \forall t\in[-1,1]$

Do $\Delta'=m^2+2>0\ \ \forall m$ nên g(t) có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2

Lúc đó

t		t_1		t_2
g(t)	+	0	-	0

Do đó : yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow t_1\le -1<1\le t_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1g(-1)\le 0\\ 1g(1)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2m-1\le 0\\ 2m-1\le 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}m\ge \frac{-1}{2}\\ m\le \frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m\le \frac{1}{2}$

<u>Cách khác :</u>

$g(t)=t^2+2mt-2\le 0\ \ \forall t\in[-1,1]$

$\Leftrightarrow \max\limits_{t\in[-1,1]} g(t)\le 0 \Leftrightarrow \max\{g(-1),g(1)\}\le 0$

$\Leftrightarrow \max\{-2m-1),-2m+1)\}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}m\ge \frac{-1}{2}\\ m\le \frac{1}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m\le \frac{1}{2}$

Bài 8 : Chứng minh $A=\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}=\frac{3}{2}$

Ta có : $\sin\frac{7\pi}{16}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{16}\right)=\cos\frac{\pi}{16}$

$\sin\frac{5\pi}{16}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{16}\right)=\cos\frac{3\pi}{16}$

Mặt khác : $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$$= 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

Do đó : $A = \sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16}$

$$= \left(\sin^4\frac{\pi}{16} + \cos^4\frac{\pi}{16}\right) + \left(\sin^4\frac{3\pi}{16} + \cos^4\frac{3\pi}{16}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}\right) \quad \left(\text{do } \sin\frac{3\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Bài 9 : Chứng minh : $16\sin 10^o.\sin 30^o.\sin 50^o.\sin 70^o = 1$

Ta có : $A = \frac{A\cos 10^o}{\cos 10^o} = \frac{1}{\cos 10^o}(16\sin 10^o\cos 10^o)\sin 30^o.\sin 50^o.\sin 70^o$

$\Leftrightarrow A = \frac{1}{\cos 10^o}\left(8\sin 20^o\right)\left(\frac{1}{2}\right)\cos 40^o.\cos 20^o$

$\Leftrightarrow A = \frac{1}{\cos 10^o}\left(4\sin 20^0\cos 20^o\right).\cos 40^o$

$\Leftrightarrow A = \frac{1}{\cos 10^o}\left(2\sin 40^o\right)\cos 40^o$

$\Leftrightarrow A = \frac{1}{\cos 10^o}\sin 80^o = \frac{\cos 10^o}{\cos 10^o} = 1$

Bài 10 : Cho ΔABC. Chứng minh : $\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}\text{tg}\frac{A}{2} = 1$

Ta có : $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$

Vậy : $\text{tg}\frac{A+B}{2} = \cot g\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}}{1 - \text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}} = \frac{1}{\text{tg}\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}\right]\text{tg}\frac{C}{2} = 1 - \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=1$$

Bài 11 : Chứng minh : $8+4\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{32}=\cot g\frac{\pi}{32}\,(*)$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow 8=\cot g\frac{\pi}{32}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{32}-2\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}-4\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$

Mà : $\cot ga-\operatorname{tg}a=\frac{\cos a}{\sin a}-\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{\cos^2 a-\sin^2 a}{\sin a\cos a}$

$$=\frac{\cos 2a}{\frac{1}{2}\sin 2a}=2\cot g2a$$

Do đó :

$$(*)\Leftrightarrow\left[\cot g\frac{\pi}{32}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{32}\right]-2\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}-4\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=8$$

$$\Leftrightarrow\left[2\cot g\frac{\pi}{16}-2\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}\right]-4\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=8$$

$$\Leftrightarrow 4\cot g\frac{\pi}{8}-4\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=8$$

$$\Leftrightarrow 8\cot g\frac{\pi}{4}=8 \quad \text{(hiển nhiên đúng)}$$

Bài :12 : Chứng minh :

a/ $\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=\frac{3}{2}$

b/ $\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\frac{1}{\sin 8x}+\frac{1}{\sin 16x}=\cot gx-\cot g16x$

a/ Ta có : $\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)+\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2x\right)\right]$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos 2x+\cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2x\right)\right]$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos 2x+2\cos 2x\cos\frac{4\pi}{3}\right]$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos 2x+2\cos 2x\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{3}{2}$$

b/ Ta có : $\cot ga-\cot gb=\frac{\cos a}{\sin a}-\frac{\cos b}{\sin b}=\frac{\sin b\cos a-\sin a\cos b}{\sin a\sin b}$

$$= \frac{\sin(b-a)}{\sin a \sin b}$$

Do đó : $\cot gx - \cot g2x = \frac{\sin(2x-x)}{\sin x \sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x}(1)$

$$\cot g2x - \cot g4x = \frac{\sin(4x-2x)}{\sin 2x \sin 4x} = \frac{1}{\sin 4x}(2)$$

$$\cot g4x - \cot g8x = \frac{\sin(8x-4x)}{\sin 4x \sin 8x} = \frac{1}{\sin 8x}(3)$$

$$\cot g8x - \cot g16x = \frac{\sin(16x-8x)}{\sin 16x \sin 8x} = \frac{1}{\sin 16x}(4)$$

Lấy (1) + (2) + (3) + (4) ta được

$$\cot gx - \cot g16x = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \frac{1}{\sin 16x}$$

Bài 13 : Chứng minh : $8\sin^3 18^0 + 8\sin^2 18^0 = 1$

Ta có: $\sin 18^0 = \cos 72^0$

$\Leftrightarrow \sin 18^0 = 2\cos^2 36^0 - 1$

$\Leftrightarrow \sin 18^0 = 2(1 - 2\sin^2 18^0)^2 - 1$

$\Leftrightarrow \sin 18^0 = 2(1 - 4\sin^2 18^0 + 4\sin^4 18^0) - 1$

$\Leftrightarrow 8\sin^4 18^0 - 8\sin^2 18^0 - \sin 18^0 + 1 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow (\sin 18^0 - 1)(8\sin^3 18^0 + 8\sin^2 18^0 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 8\sin^3 18^0 + 8\sin^2 18^0 - 1 = 0$ (do $0 < \sin 18^0 < 1$)

Cách khác :

Chia 2 vế của (1) cho ($\sin 18^0 - 1$) ta có

(1) $\Leftrightarrow 8\sin^2 18^0 (\sin 18^0 + 1) - 1 = 0$

Bài 14 : Chứng minh :

a/ $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4}(3 + \cos 4x)$

b/ $\sin 6x + \cos 6x = \frac{1}{8}(5 + 3\cos 4x)$

c/ $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{1}{64}(35 + 28\cos 4x + \cos 8x)$

a/ Ta có: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

$$= 1 - \frac{2}{4}\sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

b/ Ta có : sin6x + cos6x

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$= \left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) - \frac{1}{4}\sin^2 2x$$

$$= \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x\right) - \frac{1}{8}\left(1 - \cos 4x\right) \quad \text{(do kết quả câu a)}$$

$$= \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{5}{8}$$

c/ Ta có : $\sin^8 x + \cos^8 x = \left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x$

$$= \frac{1}{16}\left(3 + \cos 4x\right)^2 - \frac{2}{16}\sin^4 2x$$

$$= \frac{1}{16}\left(9 + 6\cos 4x + \cos^2 4x\right) - \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\left(1 - \cos 4x\right)\right]^2$$

$$= \frac{9}{16} + \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{1}{32}\left(1 + \cos 8x\right) - \frac{1}{32}\left(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x\right)$$

$$= \frac{9}{16} + \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{1}{32}\cos 8x + \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{64}\left(1 + \cos 8x\right)$$

$$= \frac{35}{64} + \frac{7}{16}\cos 4x + \frac{1}{64}\cos 8x$$

Bài 15 : Chứng minh : $\sin 3x.\sin^3 x + \cos 3x.\cos^3 x = \cos^3 2x$

Cách 1:

Ta có : $\sin 3x.\sin^3 x + \cos 3x.\cos^3 x = \cos^3 2x$

$$= \left(3\sin x - 4\sin^3 x\right)\sin^3 x + \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right)\cos^3 x$$

$$= 3\sin^4 x - 4\sin^6 x + 4\cos^6 x - 3\cos^4 x$$

$$= 3\left(\sin^4 x - \cos^4 x\right) - 4\left(\sin^6 x - \cos^6 x\right)$$

$$= 3\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$

$$-4\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x\right)$$

$$= -3\cos 2x + 4\cos 2x\left[1 - \sin^2 x\cos^2 x\right]$$

$$= -3\cos 2x + 4\cos 2x\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right)$$

$$= \cos 2x\left[-3 + 4\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right)\right]$$

$$= \cos 2x\left(1 - \sin^2 2x\right)$$

$$= \cos^3 2x$$

Cách 2 :

Ta có : $\sin 3x.\sin^3 x + \cos 3x.\cos^3 x$

$$= \sin 3x\left(\frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\right) + \cos 3x\left(\frac{3\cos x + \cos 3x}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\left(\sin 3x\sin x + \cos 3x\cos x\right) + \frac{1}{4}\left(\cos^2 3x - \sin^2 3x\right)$$

$= \frac{3}{4}\cos(3x - x) + \frac{1}{4}\cos 6x$

$= \frac{1}{4}(3\cos 2x + \cos 3.2x)$

$= \frac{1}{4}(3\cos 2x + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x)$ (bỏ dòng này cũng được)

$= \cos^3 2x$

Bài 16 : Chứng minh : $\cos 12^o + \cos 18^o - 4\cos 15^o.\cos 21^o \cos 24^o = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Ta có : $\cos 12^o + \cos 18^o - 4\cos 15^o(\cos 21^o \cos 24^o)$

$= 2\cos 15^o \cos 3^o - 2\cos 15^o(\cos 45^o + \cos 3^o)$

$= 2\cos 15^o \cos 3^o - 2\cos 15^o \cos 45^o - 2\cos 15^o \cos 3^o$

$= -2\cos 15^o \cos 45^o$

$= -(\cos 60^o + \cos 30^o)$

$= -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Bài 17 : Tính $P = \sin^2 50^o + \sin^2 70 - \cos 50^o \cos 70^o$

Ta có : $P = \frac{1}{2}(1 - \cos 100^o) + \frac{1}{2}(1 - \cos 140^o) - \frac{1}{2}(\cos 120^o + \cos 20^o)$

$P = 1 - \frac{1}{2}(\cos 100^o + \cos 140^o) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \cos 20^o\right)$

$P = 1 - (\cos 120^o \cos 20^o) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 20^o$

$P = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\cos 20^o - \frac{1}{2}\cos 20^o = \frac{5}{4}$

Bài 18 : Chứng minh : $tg30^o + tg40^o + tg50^o + tg60^o = \frac{8\sqrt{3}}{3}\cos 20^o$

Áp dụng : $tga + tgb = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$

Ta có : $(tg50^o + tg40^o) + (tg30^o + tg60^o)$

$= \frac{\sin 90^o}{\cos 50^o \cos 40^o} + \frac{\sin 90^o}{\cos 30^o \cos 60^o}$

$= \frac{1}{\sin 40^o \cos 40^o} + \frac{1}{\frac{1}{2}\cos 30^o}$

$= \frac{2}{\sin 80^o} + \frac{2}{\cos 30^o}$

$= 2\left(\frac{1}{\cos 10^o} + \frac{1}{\cos 30^o}\right)$

$$= 2\left(\frac{\cos 30^o + \cos 10^o}{\cos 10^o \cos 30^o}\right)$$

$$= 4\frac{\cos 20^p \cos 10^o}{\cos 10^o \cos 30^o}$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{3}\cos 20^o$$

Bài 19 : Cho ΔABC, Chứng minh :

a/ $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

b/ $socA + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

c/ $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

d/ $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = -2\cos A\cos B\cos C$

e/ $tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC$

f/ $\cot gA.\cot gB + \cot gB.\cot gC + \cot gC.\cot gA = 1$

g/ $\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2} = \cot g\frac{A}{2}.\cot g\frac{B}{2}.\cot g\frac{C}{2}$

a/ Ta có : $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin(A+B)$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \quad \left(\text{do } \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$$

b/ Ta có : $\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \cos(A+B)$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \left(2\cos^2\frac{A+B}{2} - 1\right)$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right] + 1$$

$$= -4\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right) + 1$$

$$= 4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + 1$$

c/ $\sin 2A \sin 2B + \sin 2C = 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$

$$= 2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$$

$$= 2\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$= -4\sin C\sin A\sin(-B)$$

$$= 4\sin C\sin A\sin B$$

d/ $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C$$

$= 1 + \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2 C$

$= 1 - \cos C\left[\cos(A-B) - \cos C\right]$ do $\left(\cos(A+B) = -\cos C\right)$

$= 1 - \cos C\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$

$= 1 - 2\cos C.\cos A.\cos B$

e/ Do $a + b = \pi - C$ nên ta có

$tg(A+B) = -tgC$

$\Leftrightarrow \dfrac{tgA + tgB}{1 - tgAtgB} = -tgC$

$\Leftrightarrow tgA + tgB = -tgC + tgAtgBtgC$

$\Leftrightarrow tgA + tgB + tgC = tgAtgBtgC$

f/ Ta có : cotg(A+B) = - cotgC

$\Leftrightarrow \dfrac{1 - tgAtgB}{tgA + tgB} = -\cot gC$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cot gA\cot gB - 1}{\cot gB + \cot gA} = -\cot gC$ (nhân tử và mẫu cho cotgA.cotgB)

$\Leftrightarrow \cot gA\cot gB - 1 = -\cot gC\cot gB - \cot gA\cot gC$

$\Leftrightarrow \cot gA\cot gB + \cot gB\cot gC + \cot gA\cot gC = 1$

g/ Ta có : $tg\dfrac{A+B}{2} = \cot g\dfrac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2}}{1 - tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}} = \cot g\dfrac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2}}{\cot g\frac{A}{2}.\cot g\frac{B}{2} - 1} = \cot g\dfrac{C}{2}$ (nhân tử và mẫu cho cotg$\dfrac{A}{2}$.cotg$\dfrac{B}{2}$)

$\Leftrightarrow \cot g\dfrac{A}{2} + \cot g\dfrac{B}{2} = \cot g\dfrac{A}{2}\cot g\dfrac{B}{2}\cot g\dfrac{C}{2} - \cot g\dfrac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \cot g\dfrac{A}{2} + \cot g\dfrac{B}{2} + \cot g\dfrac{C}{2} = \cot g\dfrac{A}{2}.\cot g\dfrac{B}{2}.\cot g\dfrac{C}{2}$

Bài 20 : Cho ΔABC. Chứng minh :

cos2A + cos2B + cos 2C + 4cosAcosBcosC + 1 = 0

Ta có : (cos2A + cos2B) + (cos2C + 1)

= 2 cos (A + B)cos(A - B) + 2cos^{2}C

= - 2cosCcos(A - B) + 2cos^{2}C

= - 2cosC[cos(A – B) + cos(A + B)] = - 4cosAcosBcosC

Do đó : cos2A + cos2B + cos2C + 1 + 4cosAcosBcosC = 0

Bài 21 : Cho ΔABC. Chứng minh :

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1 - 4\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}$$

Ta có : $(\cos 3A + \cos 3B) + \cos 3C$

$$= 2\cos\frac{3}{2}(A+B)\cos\frac{3}{2}(A-B) + 1 - 2\sin^2\frac{3C}{2}$$

Mà : $A + B = \pi - C$ nên $\frac{3}{2}(A+B) = \frac{3}{2}\pi - \frac{3C}{2}$

$$\Rightarrow \cos\frac{3}{2}(A+B) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right)$$

$$= -\sin\frac{3C}{2}$$

Do đó : $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C$

$$= -2\sin\frac{3C}{2}\cos\frac{3(A-B)}{2} - 2\sin^2\frac{3C}{2} + 1$$

$$= -2\sin\frac{3C}{2}\left[\cos\frac{3(A-B)}{2} + \sin\frac{3C}{2}\right] + 1$$

$$= -2\sin\frac{3C}{2}\left[\cos\frac{3(A-B)}{2} - \cos\frac{3}{2}(A+B)\right] + 1$$

$$= 4\sin\frac{3C}{2}\sin\frac{3A}{2}\sin\left(\frac{-3B}{2}\right) + 1$$

$$= -4\sin\frac{3C}{2}\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2} + 1$$

Bài 22 : A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh :

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

Ta có : $$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin^2\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right]}{2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right]} = \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}}$$

$$= \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\cdot\frac{-2\sin\frac{A}{2}.\sin\left(-\frac{B}{2}\right)}{2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}}$$

$$= \cot g\frac{C}{2}.tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2}$$

Bài 23 : Cho ΔABC. Chứng minh :

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$
$$=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}\,(*)$$

Ta có : $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$ vậy $tg\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\cot g\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}}{1-tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}=\frac{1}{tg\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}\right]tg\frac{C}{2}=1-tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1\,(1)$$

Do đó : $(*) \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$

$$=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1 \text{ (do (1))}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right]+\cos\frac{A}{2}\left[\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\right]=1$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A+B+C}{2}=1 \quad \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{2}=1 \text{ (hiển nhiên đúng)}$$

Bài 24 : Chứng minh : $tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}=\frac{3+\cos A+\cos B+\cos C}{\sin A+\sin B+\sin C}\,(*)$

Ta có :

$$\cos A+\cos B+\cos C+3=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\left[1-2\sin^2\frac{C}{2}\right]+3$$
$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+4-2\sin^2\frac{C}{2}$$
$$=2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right]+4$$
$$=2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right]+4$$
$$=4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}+4 \quad (1)$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right]$$
$$= 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right] + \sin\frac{B}{2}\left[\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\right] + \sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right] = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right] + \cos\frac{A}{2}\left[\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left[\frac{A+B+C}{2}\right] = 1$$

$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1$ (hiển nhiên đúng)

<u>Bài 25 :</u> Cho ΔABC. Chứng minh: $\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} + \dfrac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = 2$

<u>Cách 1 :</u>

Ta có : $\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} = \dfrac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sin A + \sin B}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

Do đó : Vế trái $= \dfrac{\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}} + \dfrac{\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}} = \dfrac{\cos\dfrac{A-B}{2} + \cos\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}}$

$$= \frac{2\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}} = 2$$

Cách 2 :

Ta có vế trái $= \dfrac{\cos\dfrac{B+C}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}} + \dfrac{\cos\dfrac{A+C}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}} + \dfrac{\cos\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}}$

$$= \frac{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} - \sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}} + \frac{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2} - \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}}$$

$$+ \frac{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2} - \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}}$$

$$= 3 - \left[\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right]$$

Mà : $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2} = 1$

(đã chứng minh tại bài 10)

Do đó : Vế trái = 3 – 1 = 2

Bài 26 : Cho ΔABC. Có $\cot g\dfrac{A}{2}, \cot g\dfrac{B}{2}, \cot g\dfrac{C}{2}$ theo tứ tự tạo cấp số cộng.

Chứng minh $\cot g\dfrac{A}{2}.\cot g\dfrac{C}{2} = 3$

Ta có : $\cot g\dfrac{A}{2}, \cot g\dfrac{B}{2}, \cot g\dfrac{C}{2}$ là cấp số cộng

$$\Leftrightarrow \cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{C}{2} = 2\cot g\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\dfrac{A+C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}} = \frac{2\cos\dfrac{B}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{2\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{2}{\cos\frac{A+C}{2}} \quad (\text{do } 0<B<\pi \text{ nên } \cos\frac{B}{2} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}} = 2 \Leftrightarrow \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2} = 3$$

Bài 27 : Cho ΔABC. Chứng minh :

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{1}{2}\left[tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} + \cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2} \right]$$

Ta có : $\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2} = \cot g\frac{A}{2}.\cot g\frac{B}{2}.\cot g\frac{C}{2}$

(Xem chứng minh bài 19g)

Mặt khác : $tg\alpha + \cot g\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

Do đó : $\frac{1}{2}\left[tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} + cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{B}{2} + cotg\frac{C}{2} \right]$

$$= \frac{1}{2}\left[tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} \right] + \frac{1}{2}\left[cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{B}{2} + cotg\frac{C}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[tg\frac{A}{2} + \cot g\frac{A}{2} \right] + \frac{1}{2}\left[tg\frac{B}{2} + \cot g\frac{B}{2} \right] + \frac{1}{2}\left[tg\frac{C}{2} + \cot g\frac{C}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$$

BÀI TẬP

1. Chứng minh :

a/ $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$

b/ $\frac{\cos 15^o + \sin 15^o}{\cos 15^o - \sin 15^o} = \sqrt{3}$

c/ $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

d/ $\sin^3 2x \sin 6x + \cos^3 2x.\cos 6x = \cos^3 4x$

e/ $tg20^o.tg40^o.tg60^o.tg80^o = 3$

f/ $tg\frac{\pi}{6} + tg\frac{2\pi}{9} + tg\frac{5\pi}{18} + tg\frac{\pi}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\cos\frac{\pi}{9}$

g/ $\cos\frac{\pi}{15}.\cos\frac{2\pi}{15}.\cos\frac{3\pi}{15}.\cos\frac{4\pi}{15}.\cos\frac{5\pi}{15}.\cos\frac{6\pi}{15}.\cos\frac{7\pi}{15} = \frac{1}{2^7}$

h/ $\text{tgx.tg}\left[\frac{\pi}{3}-x\right].\text{tg}\left[\frac{\pi}{3}+x\right]=\text{tg}3x$

k/ $\text{tg}20^o+\text{tg}40^o+\sqrt{3}\text{tg}20^o.\text{tg}40^o=\sqrt{3}$

e/ $\sin 20^o.\sin 40^o.\sin 80^o=\frac{\sqrt{3}}{8}$

m/ $\text{tg}5^o.\text{tg}55^o.\text{tg}65^o.\text{tg}75^o=1$

2. Chứng minh rằng nếu $\begin{cases}\sin x=2\sin(x+y)\\ x+y\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}(k\in z)\end{cases}$

thì $tg(x+y)=\frac{\sin y}{\cos y-2}$

3. Cho ΔABC có 3 góc đều nhọn và $A\geq B\geq C$

a/ Chứng minh : tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC

b/ Đặt tgA.tgB = p; tgA.tgC = q

Chứng minh (p-1)(q-1) ≥ 4

4. Chứng minh các biểu thức không phụ thuộc x :

a/ $A=\sin^4x\left(1+\sin^2x\right)+\cos^4x\left(1+\cos^2x\right)+5\sin^2x\cos^2x+1$

b/ $B=3\left(\sin^8x-\cos^8x\right)+4\left(\cos^6x-2\sin^6x\right)+6\sin^4x$

c/ $C=\cos^2(x-a)+\sin^2(x-b)-2\cos(x-a)\sin(x-b)\sin(a-b)$

5. Cho ΔABC, chứng minh :

a/ $\cot gB+\frac{\cos C}{\sin B\cos A}=\cot gC+\frac{\cos B}{\sin C\cos A}$

b/ $\sin^3A+\sin^3B+\sin^3C=3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$

c/ $\sin A+\sin B+\sin C=\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{A-C}{2}$

$+\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$

d/ cotgAcotgB + cotgBcotgC + cotgCcotgA = 1

e/ $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C$

f/ sin3Asin(B- C)+ sin3Bsin(C- A)+ sin3Csin(A- B) = 0

6. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

a/ $y=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$ với $0<x<\frac{\pi}{2}$

b/ $y=4x+\frac{9\pi}{x}+\sin x$ với $0<x<\infty$

c/ $y=2\sin^2x+4\sin x\cos x+\sqrt{5}$

7. Tìm giá trị lớn nhất của :

a/ $y=\sin x\sqrt{\cos x}+\cos x\sqrt{\sin x}$

b/ y = sinx + 3sin2x

c/ $y=\cos x+\sqrt{2-\cos^2x}$

Chương 2 : PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

$$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right.$$
$$\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = \pm v + k2\pi$$
$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ u = v + k'\pi \end{cases}$$
$$\operatorname{cotg} u = \operatorname{cotg} v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq k\pi \\ u = v + k'\pi \end{cases}$$
$(k, k' \in Z)$

Đặc biệt : $\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi$ $\quad$ $\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi (k \in Z)$ $\quad$ $\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi \ (k \in Z)$

$\sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ $\quad$ $\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi$

Chú ý : $\sin u \neq 0 \Leftrightarrow \cos u \neq \pm 1$
$\cos u \neq 0 \Leftrightarrow \sin u \neq \pm 1$

Bài 28 : (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D, năm 2002)
Tìm $x \in [0, 14]$ nghiệm đúng phương trình
$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0 \ (*)$

Ta có (*) : $\Leftrightarrow (4\cos^3 x - 3\cos x) - 4(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 8\cos^2 x = 0 \ \Leftrightarrow 4\cos^2 x(\cos x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $\cos x = 2$ (loại vì $\cos x \leq 1$)

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi (k \in Z)$

Ta có : $x \in [0, 14] \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \leq 14$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} \leq k\pi \leq 14 - \dfrac{\pi}{2} \ \Leftrightarrow -0,5 = -\dfrac{1}{2} \leq k \leq \dfrac{14}{\pi} - \dfrac{1}{2} \approx 3,9$

Mà $k \in Z$ nên $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Do đó : $x \in \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{2}\right\}$

Bài 29 : (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D, năm 2004)
Giải phương trình :
$(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x \ (*)$

Ta có (*) $\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin x(2\cos x - 1)$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)\left[(2\sin x + \cos x) - \sin x\right] = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \vee \sin x = -\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{\pi}{3} \vee tgx = -1 = tg\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, (k \in Z)$

Bài 30 : Giải phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0 (*)$

Ta có (*) $\Leftrightarrow (\cos x + \cos 4x) + (\cos 2x + \cos 3x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos\dfrac{5x}{2}.\cos\dfrac{3x}{2} + 2\cos\dfrac{5x}{2}.\cos\dfrac{x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos\dfrac{5x}{2}\left(\cos\dfrac{3x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos\dfrac{5x}{2}\cos x\cos\dfrac{x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{5x}{2} = 0 \vee \cos x = 0 \vee \cos\dfrac{x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{2k\pi}{5} \vee x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pi + 2\pi, (k \in Z)$

Bài 31: Giải phương trình $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x (*)$

Ta có (*) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \dfrac{1}{2}(1 - \cos 6x) = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 4x) + \dfrac{1}{2}(1 + \cos 8x)$

$\Leftrightarrow -(\cos 2x + \cos 6x) = \cos 4x + \cos 8x$

$\Leftrightarrow -2\cos 4x\cos 2x = 2\cos 6x\cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x(\cos 6x + \cos 4x) = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos 2x\cos 5x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \cos 5x = 0 \vee \cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee 5x\dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \vee x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k\pi}{5} \vee x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in \mathbb{Z}$

Bài 32 : Cho phương trình

$\sin x.\cos 4x - \sin^2 2x = 4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{7}{2} \ (*)$

Tìm các nghiệm của phương trình thỏa: $|x - 1| < 3$

Ta có : (*)$\Leftrightarrow \sin x.\cos 4x-\frac{1}{2}(1-\cos 4x)=2\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]-\frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x\cos 4x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x=-\frac{3}{2}-2\sin x$

$\Leftrightarrow \sin x\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 4x+1+2\sin x=0$

$\Leftrightarrow \cos 4x\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)+2\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow (\cos 4x+2)\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x=-2(\text{loại})\\ \sin x=-\frac{1}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+2h\pi\end{array}\right.$

Ta có : $|x-1|<3 \Leftrightarrow -3<x-1<3 \Leftrightarrow -2<x<4$

Vậy : $-2<-\frac{\pi}{6}+k2\pi<4$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}-2<2k\pi<4+\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{12}-\frac{1}{\pi}<k<\frac{2}{\pi}+\frac{1}{12}$

Do $k\in Z$ nên $k=0$. Vậy $x=-\frac{\pi}{6}$

$-2<\frac{7\pi}{6}+h2\pi<4$

$\Leftrightarrow -2-\frac{7\pi}{6}<h2\pi<4-\frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{\pi}-\frac{7}{12}<h<\frac{2}{\pi}-\frac{7}{12}$

$\Rightarrow h=0 \Rightarrow x=\frac{7\pi}{6}$. Tóm lại $x=\frac{-\pi}{6}$ hay $x=\frac{7\pi}{6}$

Cách khác : $\sin x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=(-1)^k\frac{-\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Vậy : $-2<(-1)^k\frac{-\pi}{6}+k\pi<4 \Leftrightarrow \frac{-2}{\pi}<(-1)^k\frac{-1}{6}+k<\frac{4}{\pi}$

$\Leftrightarrow$ k=0 và k = 1. Tương ứng với $x=\frac{-\pi}{6}$ hay $x=\frac{7\pi}{6}$

Bài 33 : Giải phương trình
$\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x=\sin^3 4x\,(*)$

Ta có : (*)$\Leftrightarrow \sin^3 x(4\cos^3 x-3\cos x)+\cos^3 x(3\sin x-4\sin^3 x)=\sin^3 4x$

$\Leftrightarrow 4\sin^3 x\cos^3 x-3\sin^3 x\cos x+3\sin x\cos^3 x-4\sin^3 x\cos^3 x=\sin^3 4x$

$\Leftrightarrow 3\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)=\sin^3 4x$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\sin 2x\cos 2x=\sin^3 4x$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\sin 4x = \sin^3 4x$

$\Leftrightarrow 3\sin 4x - 4\sin^3 4x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 12x = 0$

$\Leftrightarrow 12x = k\pi \qquad \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{12}(k \in Z)$

Bài 34 : (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B, năm 2002)
Giải phương trình :
$\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6a(*)$

Ta có : (*)$\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}(1-\cos 6x) - \frac{1}{2}(1+\cos 8x) = \frac{1}{2}(1-\cos 10x) - \frac{1}{2}(1+\cos 12x)$

$\Leftrightarrow \cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x$

$\Leftrightarrow 2\cos 7x\cos x = 2\cos 11x\cos x$

$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos 7x - \cos 11x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos 7x = \cos 11x$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee 7x = \pm 11x + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -\frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{k\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 35 : Giải phương trình
$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 2\cos 2x\cos x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) = \cos 2x(2\cos x + 1)$

$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \vee \sin 2x = \cos 2x$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \vee tg2x = 1 = tg\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, (k \in Z)$

Bài 36: Giải phương trình
$\cos 10x + 2\cos^2 4x + 6\cos 3x.\cos x = \cos x + 8\cos x.\cos^3 3x(*)$

Ta có : (*)$\Leftrightarrow \cos 10x + (1+\cos 8x) = \cos x + 2\cos x(4\cos^3 3x - 3\cos 3x)$

$\Leftrightarrow (\cos 10x + \cos 8x) + 1 = \cos x + 2\cos x.\cos 9x$

$\Leftrightarrow 2\cos 9x\cos x + 1 = \cos x + 2\cos x.\cos 9x$

$\Leftrightarrow \cos x = 1$

$\Leftrightarrow x = k2\pi(k \in Z)$

Bài 37 : Giải phương trình

$4\sin^3 x + 3\cos^3 x - 3\sin x - \sin^2 x\cos x = 0\,(*)$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow \sin x\left(4\sin^2 x - 3\right) - \cos x\left(\sin^2 x - 3\cos^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(4\sin^2 x - 3\right) - \cos x\left[\sin^2 x - 3\left(1 - \sin^2 x\right)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left(4\sin^2 x - 3\right)\left(\sin x - \cos x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[2\left(1 - \cos 2x\right) - 3\right]\left(\sin x - \cos x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \\ \sin x = \cos x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \text{tg}x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

Bài 38 : (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2005)
Giải phương trình :
$\sin x + \cos x + 1 + \sin 2x + \cos 2x = 0\,(*)$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\cos x\left(\sin x + \cos x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x + \cos x\right)\left(1 + 2\cos x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -\cos x \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}x = -1 \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

Bài 39 : Giải phương trình
$\left(2\sin x + 1\right)\left(3\cos 4x + 2\sin x - 4\right) + 4\cos^2 x = 3\,(*)$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow \left(2\sin x + 1\right)\left(3\cos 4x + 2\sin x - 4\right) + 4\left(1 - \sin^2 x\right) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x + 1\right)\left(3\cos 4x + 2\sin x - 4\right) + \left(1 + 2\sin x\right)\left(1 - 2\sin x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x + 1\right)\left[3\cos 4x + 2\sin x - 4 + \left(1 - 2\sin x\right)\right] = 0$

$\Leftrightarrow 3\left(\cos 4x - 1\right)\left(2\sin x + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x = 1 \vee \sin x = -\dfrac{1}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 4x = k2\pi \vee x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2} \vee x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi, (k \in Z)$

Bài 40: Giải phương trình
$\sin^6 x + \cos^6 x = 2(\sin^8 x + \cos^8 x) (*)$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \sin^6 x - 2\sin^8 x + \cos^6 x - 2\cos^8 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin^6 x(1 - 2\sin^2 x) - \cos^6 x(2\cos^2 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin^6 x \cos 2x - \cos^6 x.\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin^6 x - \cos^6 x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \sin^6 x = \cos^6 x$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee tg^6 x = 1$

$\Leftrightarrow 2x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \vee tgx = \pm 1$

$\Leftrightarrow x = (2k+1)\dfrac{\pi}{4} \vee x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 41 : Giải phương trình
$\cos x.\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x = \dfrac{1}{16} (*)$

Ta thấy $x = k\pi$ không là nghiệm của (*) vì lúc đó
$\cos x = \pm 1, \cos 2x = \cos 4x = \cos 8x = 1$

(*) thành : $\pm 1 = \dfrac{1}{16}$ vô nghiệm

Nhân 2 vế của (*) cho $16\sin x \neq 0$ ta được

(*)$\Leftrightarrow (16\sin x\cos x)\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x = \sin x$ và $\sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow (8\sin 2x\cos 2x)\cos 4x.\cos 8x = \sin x$ và $\sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow (4\sin 4x\cos 4x)\cos 8x = \sin x$ và $\sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 8x\cos 8x = \sin x$ và $\sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow \sin 16x = \sin x$ và $\sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{k2\pi}{15} \vee x = \dfrac{\pi}{17} + \dfrac{k\pi}{17}, (k \in Z)$

Do : $x = h\pi$ không là nghiệm nên $k \neq 15m$ và $2k + 1 \neq 17n (n, m \in Z)$

Bài 42: Giải phương trình $8\cos^3\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos 3x (*)$

Đặt $t = x + \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = t - \dfrac{\pi}{3}$

Thì $\cos 3x = \cos(3t - \pi) = \cos(\pi - 3t) = -\cos 3t$

Vậy (*) thành $8\cos^3 t = -\cos 3t$

$\Leftrightarrow 8\cos^3 t = -4\cos^3 t + 3\cos t$

$\Leftrightarrow 12\cos^3 t - 3\cos t = 0$

$\Leftrightarrow 3\cos t\left(4\cos^2 t - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3\cos t\left[2(1 + \cos 2t) - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow \cos t(2\cos 2t + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos t = 0 \vee \cos 2t = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow t = (2k+1)\frac{\pi}{2} \vee 2t = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee t = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$

Mà $x = t - \frac{\pi}{3}$

Vậy (*)$\Leftrightarrow$ $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, (vớik $\in Z$)

Ghi chú :

Khi giải các phương trình lượng giác có chứa tgu, cotgu, có ẩn ở mẫu, hay chứa căn bậc chẵn... ta phải đặt điều kiện để phương trình xác định. Ta sẽ dùng các cách sau đây để kiểm tra điều kiện xem có nhận nghiệm hay không.

+ Thay các giá trị x tìm được vào điều kiện thử lại xem có thỏa

Hoặc + Biểu diễn các ngọn cung điều kiện và các ngọn cung tìm được trên cùng một đường tròn lượng giác. Ta sẽ loại bỏ ngọn cung của nghiệm khi có trùng với ngọn cung của điều kiện.

Hoặc + So vơi các điều kiện trong quá trình giải phương trình.

Bài 43 : Giải phương trình $tg^2x - tgx.tg3x = 2(*)$

Điều kiện $\begin{cases}\cos x \neq 0 \\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{h\pi}{3}$

Lúc đó ta có (*) $\Leftrightarrow tgx(tgx - tg3x) = 2$

$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\right) = 2$

$\Leftrightarrow \sin x(\sin x\cos 3x - \cos x\sin 3x) = 2\cos^2 x\cos 3x$

$\Leftrightarrow \sin x\sin(-2x) = 2\cos^2 x.\cos 3x$

$\Leftrightarrow -2\sin^2 x\cos x = 2\cos^2 x\cos 3x$

$\Leftrightarrow -\sin^2 x = \cos x\cos 3x$ (do $\cos x \neq 0$)

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)$

$\Leftrightarrow \cos 4x = -1 \Leftrightarrow 4x = \pi + k2\pi$

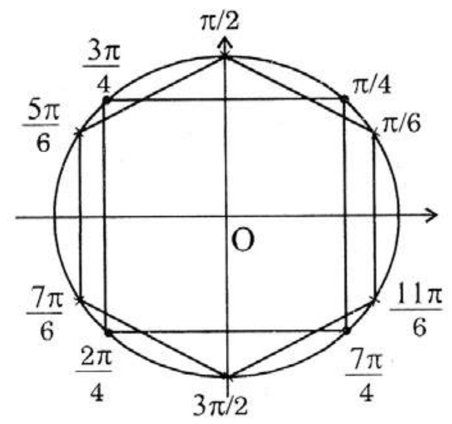
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}(k \in Z)$

so với điều kiện

Cách 1 : Khi $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ thì $\cos 3x = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3k\pi}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$ (nhận)

Cách 2 : Biểu diễn các ngọn cung điều kiện và ngọn cung nghiệm ta thấy không có ngọn cung nào trùng nhau. Do đó :

$(*) \Leftrightarrow \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$



Lưu ý cách 2 rất mất thời gian

Cách 3 :

Nếu $3x = \frac{3\pi}{4} + \frac{3k\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + h\pi$

Thì $3 + 6k = 2 + 4h$

$\Leftrightarrow 1 = 4h - 6k$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = 2h - 3k$ (vô lý vì $k, h \in Z$)

Bài 44: Giải phương trình

$$tg^2x + \cot g^2x + \cot g^2 2x = \frac{11}{3} (*)$$

Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases}$

Do đó :

$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) + \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) + \left(\frac{1}{\sin^2 2x} - 1\right) = \frac{11}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{4\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{20}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{4\sin^2 x + 4\cos^2 x + 1}{4\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{20}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{5}{\sin^2 2x} = \frac{20}{3}$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{3}{4}$ (nhận do $\sin 2x \neq 0$)

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow 4x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}(k \in Z)$

Chú ý : Có thể dễ dàng chứng minh : $\text{tgx} + \cot gx = \dfrac{2}{\sin 2x}$

Vậy (*)$\Leftrightarrow (\text{tgx} + \cot gx)^2 - 2 + \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1\right) = \dfrac{11}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{\sin^2 2x} = \dfrac{20}{3}$

Bài 45 : (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D, năm 2003)
Giải phương trình

$$\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\text{tg}^2 x - \cos^2\frac{x}{2} = 0\,(*)$$

Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1$

lúc đó :

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left[1 - \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right]\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{2}[1 + \cos x] = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(1 - \sin x)(1 - \cos^2 x)}{1 - \sin^2 x} - (1 + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1 - \cos^2 x}{1 + \sin x} - (1 + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 + \cos x)\left[\dfrac{1 - \cos x}{1 + \sin x} - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow (1 + \cos x)(-\cos x - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\,(\text{nhận do } \cos x \neq 0)\\ \text{tgx} = -1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + k2\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right.$

Bài 46 : Giải phương trình
$\sin 2x(\cot gx + \text{tg}2x) = 4\cos^2 x\,(*)$

Điều kiện : $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x \neq 0\\ 2\cos^2 x - 1 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \neq \pm 1\\ \cos x \neq \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

Ta có : $\cot gx + \text{tg}2x = \dfrac{\cos x}{\sin x} + \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$

$= \dfrac{\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x}{\sin x \cos 2x}$

$= \dfrac{\cos x}{\sin x \cos 2x}$

Lúc đó : (*) $\Leftrightarrow 2\sin x \cos x\left(\dfrac{\cos x}{\sin x \cos 2x}\right) = 4\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x}{\cos 2x} = 4\cos^2 x \ \ (\text{Do} \sin x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \\ \dfrac{1}{\cos 2x} = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \left(\text{Nhận do} \cos x \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ và} \neq \pm 1\right) \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}, (\text{nhận do} \sin x \neq 0)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi\end{array}\right. \ (k \in Z)$$

Bài 47 : Giải phương trình:

$$\frac{\cot g^2 x - tg^2 x}{\cos 2x} = 16(1 + \cos 4x)$$

Ta có : $\cot g^2 x - tg^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}$$

Điều kiện : $\begin{cases}\sin 2x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \ \sin 4x \neq 0$

Lúc đó (*) $\Leftrightarrow \dfrac{4}{\sin^2 2x} = 16(1 + \cos 4x)$

$$\Leftrightarrow 1 = 4(1 + \cos 4x)\sin^2 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2(1 + \cos 4x)(1 - \cos 4x)$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2(1 - \cos^2 4x) = 2\sin^2 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 4x = \frac{1}{2} (\text{nhận do } \sin 4x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 8x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 48: Giải phương trình: $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{7}{8}\cot g\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)\cot g\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) (*)$

Điều kiện $\begin{cases}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0 \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0 \\ \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin\left(2x + \dfrac{2\pi}{3}\right) \neq 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow tg2x \neq \sqrt{3}$$

Ta có: $\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x.\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

Và: $\cot g\left(x + \frac{\pi}{3}\right).\cot g\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cot g\left(x + \frac{\pi}{3}\right).tg\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{7}{8}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = -\frac{1}{8}$$
$$\Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 4x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$$

(nhận do $tg2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \neq \sqrt{3}$)

Bài 49: Giải phương trình $2tgx + \cot g2x = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}(*)$

Điều kiện: $\begin{cases}\cos 2x \neq 0\\ \sin 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq \pm 1$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow \frac{2\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x + \cos 2x = 2\sin^2 2x + 1$$
$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x + \left(1 - 2\sin^2 x\right) = 8\sin^2 x\cos^2 x + 1$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\left(1 - 4\cos^2 x\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\left[1 - 2\left(1 + \cos 2x\right)\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\left(\text{loại do } \sin 2x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq 0\right)\\ \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}\left(\text{nhận do} \cos 2x \neq \pm 1\right)\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi\left(k \in Z\right)$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 51: Giải phương trình: $\frac{3\left(\sin x + tgx\right)}{tgx - \sin x} - 2\left(1 + \cos x\right) = 0(*)$

Điều kiện : $tgx - \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases}$

Lúc đó $(*) \Leftrightarrow \dfrac{3(\sin x + tgx).\cot gx}{(tgx - \sin x).\cot gx} - 2(1+\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3(\cos x + 1)}{(1-\cos x)} - 2(1+\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{1-\cos x} - 2 = 0 \left(\text{do} \sin x \neq 0 \text{ nên} \cos x + 1 \neq 0\right)$

$\Leftrightarrow 1 + 2\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2}$ (nhận so với điều kiện)

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 52 : Giải phương trình

$$\frac{(1-\cos x)^2 + (1+\cos x)^2}{4(1-\sin x)} - tg^2x\sin x = \frac{1}{2}(1+\sin x) + tg^2x \ (*)$$

Điều kiện : $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 0$

Lúc đó $(*) \Leftrightarrow \dfrac{2(1+\cos^2 x)}{4(1-\sin x)} - \dfrac{\sin^3 x}{1-\sin^2 x} = \dfrac{1}{2}(1+\sin x) + \dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$

$\Leftrightarrow (1+\cos^2 x)(1+\sin x) - 2\sin^3 x = (1+\sin x)(1-\sin^2 x) + 2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow (1+\sin x)(1+\cos^2 x) = (1+\sin x)\cos^2 x + 2\sin^2 x(1+\sin x)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+\sin x = 0 \\ 1+\cos^2 x = \cos^2 x + 2\sin^2 x \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \ (\text{loại do} \cos x \neq 0) \\ 1 = 1 - \cos 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ (nhận do $\cos x \neq 0$)

Bài 53 : Giải phương trình

$$\cos 3x.tg5x = \sin 7x \ (*)$$

Điều kiện $\cos 5x \neq 0$

Lúc đó : $(*) \Leftrightarrow \cos 3x.\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x} = \sin 7x$

$\Leftrightarrow \sin 5x.\cos 3x = \sin 7x.\cos 5x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[\sin 8x + \sin 2x] = \frac{1}{2}[\sin 12x + \sin 2x]$

$\Leftrightarrow \sin 8x = \sin 12x$

$\Leftrightarrow 12x = 8x + k2\pi \vee 12x = \pi - 8x + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}$

So lại với điều kiện

$x = \frac{k\pi}{2}$ thì $\cos 5x = \cos\frac{5k\pi}{2} = \cos\frac{k\pi}{2}$ (loại nếu k lẻ)

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}$ thì $\cos 5x = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) \neq 0$ nhận

Do đó : (*)$\Leftrightarrow x = h\pi \vee x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}$, với k, h $\in \mathbb{Z}$

Bài 54 : Giải phương trình

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}(\text{tg}x + \cot g2x)\ (*)$$

Điều kiện : $\sin 2x \neq 0$

Ta có : $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

$\text{tg}x + \cot g2x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$

$= \frac{\sin 2x\sin x + \cos x\cos 2x}{\cos x\sin 2x}$

$= \frac{\cos(2x - x)}{\cos x\sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x}$

Do đó : (*) $\Leftrightarrow \frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2\sin 2x}$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x = 1$ (nhận do $\sin 2x \neq 0$)

$\Leftrightarrow \cos^2 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

Bài 55 : Giải phương trình

$$\text{tg}^2x.\cot g^2 2x.\cot g3x = \text{tg}^2x - \cot g^2 2x + \cot g3x\ (*)$$

Điều kiện : $\cos x \neq 0 \wedge \sin 2x \neq 0 \wedge \sin 3x \neq 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \wedge \sin 3x \neq 0$

Lúc đó (*) $\Leftrightarrow \text{cotg}3x\left(tg^2x\cot g^2 2x - 1\right) = tg^2x - \cot g^2 2x$

$$\Leftrightarrow \cot g3x\left[\left(\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\right)\left(\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}\right) - 1\right] = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} - \frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}$$

$$\Leftrightarrow \cot g3x\left[(1-\cos 2x)(1+\cos 4x) - (1+\cos 2x)(1-\cos 4x)\right]$$

$$= (1-\cos 2x)(1-\cos 4x) - (1+\cos 4x)(1+\cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \cot g3x\left[2\cos 4x - 2\cos 2x\right] = -2\left(\cos 4x + \cos 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 3x}{\sin 3x}\left[-4\sin 3x \sin x\right] = -4\cos 3x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x \sin x = \cos 3x \cos x \qquad (\text{do } \sin 3x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = 0 \vee \sin x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee tgx = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{4} + l\pi\left(k, l \in Z\right)$$

So với điều kiện: $\sin 2x.\sin 3x \neq 0$

* Khi $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ thì $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right).\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{1+2k}{3}\right)\pi \neq 0$$

Luôn đúng $\forall k$ thỏa $2k + 1 \neq 3m\left(m \in Z\right)$

* Khi $x = \frac{\pi}{4} + l\pi$ thì $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2l\pi\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4} + 3l\pi\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$

luôn đúng

Do đó: (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\ ,\ k \in Z \wedge 2k \neq 3m - 1\,(m \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{\pi}{4} + l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Cách khác:

(*) $\Leftrightarrow \text{cotg}3x\left(tg^2x\cot g^2 2x - 1\right) = tg^2x - \cot g^2 2x$

$$\Leftrightarrow \cot g3x = \frac{tg^2x - \cot g^2 2x}{tg^2x\cot g^2 2x - 1} = \frac{tg^2 2x.tg^2x - 1}{tg^2x - tg^2 2x}$$

$$\Leftrightarrow \cot g3x = \frac{(1 + tg2x.tgx)(1 - tg2x.tgx)}{(tg2x - tgx)(tg2x + tgx)}$$

$$\Leftrightarrow \cot g3x = \cot gx.\text{cotg}3x \Leftrightarrow \cos 3x = 0 \vee \sin x = \cos x$$

BÀI TẬP

1. Tìm các nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{3}, 3\pi\right)$ của phương trình:

$\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$

2. Tìm các nghiệm x trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ của phương trình

$\sin^2 4x - \cos^2 6x = \sin(10,5\pi + 10x)$

3. Giải các phương trình sau:

a/ $\sin^3 x + \cos^3 x = 2\left(\sin^5 x + \cos^5 x\right)$

b/ $\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3}$

c/ $tg^2 x = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$

d/ $tg2x - tg3x - tg5x = tg2x.tg3x.tg5x$

e/ $\cos\frac{4}{3}x = \cos^2 x$

f/ $2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$

i/ $2tgx + \cot g2x = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$

h/ $3tg3x + \cot g2x = 2tgx + \frac{2}{\sin 4x}$

k/ $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$

l/ $\frac{\sin 2x}{1 + \sin x} + 2\cos x = 0$

m/ $\sqrt{25 - 4x^2}\left(3\sin 2\pi x + 8\sin \pi x\right) = 0$

n/ $\frac{\sin x.\cot g5x}{\cos 9x} = 1$

o/ $3tg6x - \frac{2}{\sin 8x} = 2tg2x - \cot g4x$

p/ $2\sin 3x\left(1 - 4\sin^2 x\right) = 1$

q/ $tg^2 x = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$

r/ $\cos^3 x\cos 3x + \sin^3 x\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

s/ $\sin^4\left(\frac{x}{3}\right) + \cos^4\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{5}{8}$

t/ $\cos^3 x - 4\sin^3 x - 3\cos x\sin^2 x + \sin x = 0$

u/ $\sin^4\frac{x}{2} + \cos^4\frac{x}{2} = 1 - 2\sin x$

v/ $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x.\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

w/ $tg^4x+1=\frac{\left(2-\sin^2 x\right)\sin 3x}{\cos^4 x}$

y/ $tgx+\cos x-\cos^2 x=\sin x\left(1+tg\frac{x}{2}tgx\right)$

4. Cho phương trình: $\left(2\sin x-1\right)\left(2\cos 2x+2\sin x+m\right)=3-4\cos^2 x\left(1\right)$

a/ Giải phương trình khi m = 1

b/ Tìm m để (1) có đúng 2 nghiệm trên $\left[0,\pi\right]$

(ĐS: $m=0\vee m<-1\vee m>3$)

5. Cho phương trình:

$4\cos^5 x\sin x-4\sin^5 x.\cos x=\sin^2 4x+m\left(1\right)$

Biết rằng $x=\pi$ là một nghiệm của (1). Hãy giải phương trình trong trường hợp đó.

CHƯƠNG III.
PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

$$a\sin^2 u + b\sin u + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$
$$a\cos^2 u + b\cos u + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$
$$atg^2u + btgu = c = 0 \qquad (a \neq 0)$$
$$a\cot g^2u + b\cot gu + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

Cách giải:
Đặt : $t = \sin u$ hay $t = \cos u$ với $|t| \leq 1$

$t = tgu$ (điều kiện $u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$)

$t = \cot gu$ (điều kiện $u \neq k\pi$)

Các phương trình trên thành: $at^2 + bt + c = 0$
Giải phương trình tìm được t, so với điều kiện để nhận nghiệm t.
Từ đó giải phương trình lượng giác cơ bản tìm được u.

Bài 56: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A, năm 2002)
Tìm các nghiệm trên $(0, 2\pi)$ của phương trình

$$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = 3 + \cos 2x \ (*)$$

Điều kiện: $\sin 2x \neq -\frac{1}{2}$

Ta có: $\sin 3x + \cos 3x = \left(3\sin x - 4\sin^3 x\right) + \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right)$

$= -3(\cos x - \sin x) + 4\left(\cos^3 x - \sin^3 x\right)$

$= (\cos x - \sin x)\left[-3 + 4\left(\cos^2 x + \cos x\sin x + \sin^2 x\right)\right]$

$= (\cos x - \sin x)(1 + 2\sin 2x)$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow 5\left[\sin x + (\cos x - \sin x)\right] = 3 + \left(2\cos^2 x - 1\right)$

$\left(\text{do } \sin 2x \neq -\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = 2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ (nhận do $\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \neq -\frac{1}{2}$)

Do $x \in (0, 2\pi)$ nên $x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$

Bài 57: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A, năm 2005)
Giải phương trình: $\cos^2 3x.\cos 2x - \cos^2 x = 0 (*)$

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \frac{1+\cos 6x}{2}.\cos 2x - \frac{1+\cos 2x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \cos 6x.\cos 2x - 1 = 0$ (**)

Cách 1: (**) $\Leftrightarrow \left(4\cos^3 2x - 3\cos 2x\right)\cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^4 2x - 3\cos^2 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 2x = 1 \\ \cos^2 2x = -\frac{1}{4} (\text{vô nghiệm}) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} (k \in Z)$

Cách 2: (**) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 1 \\ \cos 4x = -\frac{3}{2} (\text{loại}) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 4x = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} (k \in Z)$

Cách 3: phương trình lượng giác không mẫu mực:

(**) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 6x = \cos 2x = 1 \\ \cos 6x = \cos 2x = -1 \end{array}\right.$

Cách 4: $\cos 8x + \cos 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x = 2$

$\Leftrightarrow \cos 8x = \cos 4x = 1 \Leftrightarrow \cos 4x = 1$

Bài 58: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D, năm 2005)
Giải phương trình: $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$

Ta có:

(*)

$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x + \frac{1}{2}\left[\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x\right] - \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\frac{1}{2}[-\cos 4x+\sin 2x]-\frac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sin^2 2x-\frac{1}{2}\left(1-2\sin^2 2x\right)+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x+\sin 2x-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=1\\ \sin 2x=-2(\text{loại})\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Bài 59: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B, năm 2004)
Giải phương trình: $5\sin x-2=3\left(1-\sin x\right)\text{tg}^2 x \quad (*)$

Điều kiện: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow \sin x\neq \pm 1$

Khi đó: (*) $\Leftrightarrow 5\sin x-2=3\left(1-\sin x\right)\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow 5\sin x-2=3\left(1-\sin x\right)\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$

$\Leftrightarrow 5\sin x-2=\frac{3\sin^2 x}{1+\sin x}$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}(\text{nhận do} \sin x\neq\pm 1)\\ \sin x=-2(\text{vô nghiệm})\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\left(k\in Z\right)$

Bài 60: Giải phương trình: $2\sin 3x-\frac{1}{\sin x}=2\cos 3x+\frac{1}{\cos x}(*)$

Điều kiện: $\sin 2x\neq 0$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow 2\left(\sin 3x-\cos 3x\right)=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$

$\Leftrightarrow 2\left[3\left(\sin x+\cos x\right)-4\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)\right]=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$

$\Leftrightarrow 2\left(\sin x+\cos x\right)\left[3-4\left(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x\right)\right]=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$

$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left[-2+8\sin x\cos x-\frac{1}{\sin x\cos x}\right]=0$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)\left[4\sin 2x-\frac{2}{\sin 2x}-2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ 4\sin^2 2x-2\sin 2x-2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{tgx}=-1\\ \sin 2x=1\vee \sin 2x=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right.\text{(nhận so với điều kiện)}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\vee 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\vee 2x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\vee 2x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\vee x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\vee x=\frac{7\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Bài 61: Giải phương trình: $\dfrac{\cos x\left(2\sin x+3\sqrt{2}\right)-2\cos^2 x-1}{1+\sin 2x}=1\quad (*)$

Điều kiện: $\sin 2x\neq -1\Leftrightarrow x\neq -\dfrac{\pi}{4}+m\pi$

Lúc đó:

$(*)\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+3\sqrt{2}\cos x-2\cos^2 x-1=1+\sin 2x$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\sqrt{2}\cos x+2=0$

$\Leftrightarrow \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hay $\cos x=\sqrt{2}$ (vô nghiệm)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k'2\pi\text{(loại do điều kiện)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$$

Bài 62: Giải phương trình:

$$\cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{3x}{2}-\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{2}(*)$$

Ta có: $(*)\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cos x(\cos 2x+\cos x)+\dfrac{1}{2}\sin x(\cos 2x-\cos x)=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x.\cos 2x+\cos^2 x+\sin x\cos 2x-\sin x\cos x=1$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos x+\sin x)=1-\cos^2 x+\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos x+\sin x)=\sin x(\sin x+\cos x)$

$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(\cos 2x-\sin x)=0(**)$

$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)\left(1-2\sin^2 x-\sin x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-\sin x\\ 2\sin^2 x+\sin x-1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = -1 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

Cách khác: $(**) \Leftrightarrow tgx = -1 \vee \cos 2x = \sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

Bài 63: Giải phương trình: $4\cos^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x\,(*)$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow 4\cos^3 x + 6\sqrt{2}\sin x\cos x - 8\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(2\cos^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left[2\left(1 - \sin^2 x\right) + 3\sqrt{2}\sin x - 4\right] = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = \sqrt{2}\,(\text{vô nghiệm}) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \vee x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi\,(k \in Z)$

Bài 64: Giải phương trình:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}\left(1 - \sin x\right)(*)$$

$(*) \Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos\dfrac{\pi}{4} + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}\left(1 - \sin x\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(1 - 2\sin^2 x\right) + \left(4 + \sqrt{2}\right)\sin x - 2 - \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin^2 x - \left(4 + \sqrt{2}\right)\sin x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \left(2\sqrt{2} + 1\right)\sin x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \sqrt{2}\,(\text{loại}) \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ hay $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 65: Giải phương trình : $3\cot g^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = \left(2+3\sqrt{2}\right)\cos x\,(*)$

Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \pm 1$

Chia hai vế (*) cho $\sin^2 x$ ta được:

$(*) \Leftrightarrow 3\dfrac{\cos^2 x}{\sin^4 x} + 2\sqrt{2} = \left(2+3\sqrt{2}\right)\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ và $\sin x \neq 0$

Đặt $t = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ ta được phương trình:

$3t^2 - \left(2+3\sqrt{2}\right)t + 2\sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow t = \sqrt{2} \vee t = \dfrac{2}{3}$

* Với $t = \dfrac{2}{3}$ ta có: $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow 3\cos x = 2\left(1-\cos^2 x\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -2\,(\text{loại}) \\ \cos x = \dfrac{1}{2}\,(\text{nhận do } \cos x \neq \pm 1) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\,(k \in Z)$

* Với $t = \sqrt{2}$ ta có: $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos x = \sqrt{2}\left(1-\cos^2 x\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\sqrt{2}\,(\text{loại}) \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(\text{nhận do} \cos x \neq \pm 1) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 66: Giải phương trình: $\dfrac{4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x}{\cos x} = 0\,(*)$

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Lúc đó:

$(*) \Leftrightarrow 4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 4\left(1-\cos^2 2x\right)+3\left(1-\cos 2x\right)-9-3\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x+6\cos 2x+2=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x=-1 \vee \cos 2x=-\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1=-1 \vee 2\cos^2 x-1=-\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\left(\text{loại do điều kiện}\right)\\ \cos x=\pm\dfrac{1}{2}\left(\text{nhận do }\cos x\neq 0\right)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \vee x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\left(k\in Z\right)$

Bài 67: Cho $f\left(x\right)=\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x+\dfrac{2}{5}\sin 5x$

Giải phương trình: $f'\left(x\right)=0$

Ta có: $f'\left(x\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos x+\cos 3x+2\cos 5x=0$

$\Leftrightarrow \left(\cos x+\cos 5x\right)+\left(\cos 3x+\cos 5x\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 3x\cos 2x+2\cos 4x\cos x=0$

$\Leftrightarrow \left(4\cos^3 x-3\cos x\right)\cos 2x+\left(2\cos^2 2x-1\right)\cos x=0$

$\Leftrightarrow \left[\left(4\cos^2 x-3\right)\cos 2x+2\cos^2 2x-1\right]\cos x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[2\left(1+\cos 2x\right)-3\right]\cos 2x+2\cos^2 2x-1=0\\ \cos x=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4\cos^2 2x-\cos 2x-1=0\\ \cos x=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \cos 2x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{8} \vee \cos x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}=\cos\alpha \vee \cos 2x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{8}=\cos\beta \vee \cos x=0$

$\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\alpha}{2}+k\pi \vee x=\pm\dfrac{\beta}{2}+k\pi \vee x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in Z\right)$

Bài 68: Giải phương trình: $\sin^8 x+\cos^8 x=\dfrac{17}{16}\cos^2 2x\left(*\right)$

Ta có:

$$\sin^8 x+\cos^8 x=\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)^2-2\sin^4 x\cos^4 x$$
$$=\left[\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right]^2-\frac{1}{8}\sin^4 2x$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2-\frac{1}{8}\sin^4 2x$$
$$=1-\sin^2 2x+\frac{1}{8}\sin^4 2x$$

Do đó:

$$(*)\Leftrightarrow 16\left(1-\sin^2 2x+\frac{1}{8}\sin^4 2x\right)=17\left(1-\sin^2 2x\right)$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^4 2x+\sin^2 2x-1=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin^2 2x=-1\,(\text{loại})\\ \sin^2 2x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1-\cos 4x\right)=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos 4x=0\Leftrightarrow x=\left(2k+1\right)\frac{\pi}{8},\left(k\in Z\right)$$

<u>Bài 69</u>: Giải phương trình: $\sin\frac{5x}{2}=5\cos^3 x.\sin\frac{x}{2}\,(*)$

Nhận xét thấy: $\cos\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\Leftrightarrow \cos x=-1$

Thay vào (*) ta được:

$\sin\left(\frac{5\pi}{2}+5k\pi\right)=-5.\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, không thỏa $\forall k$

Do $\cos\frac{x}{2}$ không là nghiệm của (*) nên:

$$(*)\Leftrightarrow \sin\frac{5x}{2}.\cos\frac{x}{2}=5\cos^2 x.\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\ \text{ và }\ \cos\frac{x}{2}\neq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sin 3x+\sin 2x\right)=\frac{5}{2}\cos^3 x.\sin x\ \text{ và }\ \cos\frac{x}{2}\neq 0$$
$$\Leftrightarrow 3\sin x-4\sin^3 x+2\sin x\cos x=5\cos^3 x.\sin x\ \text{ và }\ \cos\frac{x}{2}\neq 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos\dfrac{x}{2}\neq 0\\ 3-4\sin^2 x+2\cos x=5\cos^3 x\vee \sin x=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos\dfrac{x}{2}\neq 0\\ 5\cos^3 x-4\cos^2 x-2\cos x+1=0\vee \sin\dfrac{x}{2}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq -1 \\ (\cos x - 1)\left(5\cos^2 x + \cos x - 1\right) = 0 \vee \sin\dfrac{x}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq -1 \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{10} = \cos\alpha \\ \cos x = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{10} = \cos\beta \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = k2\pi$ hay $x = \pm\alpha + k2\pi$ hay $x = \pm\beta + k2\pi, (k \in Z)$

Bài 70: Giải phương trình: $\sin 2x(\cot gx + tg2x) = 4\cos^2 x\,(*)$

Điều kiện: $\cos 2x \neq 0$ và $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \wedge \cos 2x \neq 1$

Ta có: $\cot gx + tg2x = \dfrac{\cos x}{\sin x} + \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$

$$= \frac{\cos 2x\cos x + \sin 2x\sin x}{\sin x\cos 2x}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x\cos 2x}$$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x\left(\dfrac{\cos x}{\sin x\cos 2x}\right) = 4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos^2 x}{\cos 2x} = 2\cos^2 x$

$\Leftrightarrow (\cos 2x + 1) = 2\cos 2x(\cos 2x + 1)$

$\Leftrightarrow (\cos 2x + 1) = 0$ hay $1 = 2\cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x = -1 \vee \cos 2x = \dfrac{1}{2}$ (nhận do $\cos 2x \neq 0$ và $\cos 2x \neq 1$)

$\Leftrightarrow 2x = \pi + k2\pi \vee 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 71: Giải phương trình: $2\cos^2\dfrac{6x}{5} + 1 = 3\cos\dfrac{8x}{5}\,(*)$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \left(1 + \cos\dfrac{12x}{5}\right) + 1 = 3\left(2\cos^2\dfrac{4x}{5} - 1\right)$

$$\Leftrightarrow 2 + 4\cos^3\frac{4x}{5} - 3\cos\frac{4x}{5} = 3\left(2\cos^2\frac{4x}{5} - 1\right)$$

Đặt $t=\cos\frac{4}{5}x$ (điều kiện $|t|\le 1$)

Ta có phương trình :

$4t^3-3t+2=6t^2-3$

$\Leftrightarrow 4t^3-6t^2-3t+5=0$

$\Leftrightarrow (t-1)(4t^2-2t-5)=0$

$\Leftrightarrow t=1 \vee t=\frac{1-\sqrt{21}}{4} \vee t=\frac{1+\sqrt{21}}{4}$ (loại)

Vậy

- $\cos\frac{4x}{5}=1 \Leftrightarrow \frac{4x}{5}=2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{5k\pi}{2}\ (k\in Z)$

- $\cos\frac{4x}{5}=\frac{1-\sqrt{21}}{4}=\cos\alpha$ (với $0<\alpha<2\pi$)

$\Leftrightarrow \frac{4x}{5}=\pm\alpha+\ell 2\pi$

$\Leftrightarrow x=\pm\frac{5\alpha}{4}+\frac{\ell 5\pi}{2}, (\ell\in Z)$

Bài 72 : Giải phương trình $tg^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=tgx-1\ (*)$

Đặt $t=x-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+t$

(*) thành : $tg^3t=tg\left(\frac{\pi}{4}+t\right)-1=\frac{1+tgt}{1-tgt}-1$ với $\cos t\ne 0\wedge tgt\ne 1$

$\Leftrightarrow tg^3t=\frac{2tgt}{1-tgt}$

$\Leftrightarrow tg^3t-tg^4t=2tgt$

$\Leftrightarrow tgt(tg^3t-tg^2t+2)=0$

$\Leftrightarrow tgt(tgt+1)(tg^2t-2tgt+2)=0$

$\Leftrightarrow tgt=0\vee tgt=-1$ (nhận so điều kiện)

$\Leftrightarrow t=k\pi\vee t=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Vậy (*)

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ hay $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Bài 73 : Giải phương trình $\dfrac{\sin^4 2x+\cos^4 2x}{tg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)tg\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}=\cos^4 4x \quad (*)$

Điều kiện

$$\begin{cases}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\neq 0\\ \sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)\neq 0\\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2x\right)\neq 0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \cos 2x\neq 0\Leftrightarrow \sin 2x\neq \pm 1$

Do :

$$tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1-tgx}{1+tgx}.\frac{1+tgx}{1-tgx}=1$$

Khi $\cos 2x\neq 0$ thì :

$(*)\Leftrightarrow \sin^4 2x+\cos^4 2x=\cos^4 4x$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 2x\cos^2 2x=\cos^4 4x$

$\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2}\sin^2 4x=\cos^4 4x$

$\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2}\left(1-\cos^2 4x\right)=\cos^4 4x$

$\Leftrightarrow 2\cos^4 4x-\cos^2 4x-1=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos^2 4x=1\\ \cos^2 4x=-\dfrac{1}{2}\left(\text{vô nghiệm}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow 1-\sin^2 4x=1$$

$\Leftrightarrow \sin 4x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \sin 2x=0\left(\text{do }\cos 2x\neq 0\right)$

$\Leftrightarrow 2x=k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=k\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

Bài 74 :Giải phương trình: $48-\dfrac{1}{\cos^4 x}-\dfrac{2}{\sin^2 x}\left(1+\cot g2x\cot gx\right)=0(*)$

Điều kiện : $\sin 2x\neq 0$

Ta có :

$$1+\cot g2x\cot gx=1+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}.\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin 2x\sin x+\cos 2x\cos x}{\sin x\sin 2x}$$

$$=\frac{\cos x}{2\sin^2 x\cos x}=\frac{1}{2\sin^2 x}\left(\text{do }\cos x\neq 0\right)$$

Lúc đó (*) $\Leftrightarrow 48-\dfrac{1}{\cos^4 x}-\dfrac{1}{\sin^4 x}=0$

$\Leftrightarrow 48=\frac{1}{\cos^4 x}+\frac{1}{\sin^4 x}=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^4 x\cos^4 x}$

$\Leftrightarrow 48\sin^4 x\cos^4 x=\sin^4 x+\cos^4 x$

$\Leftrightarrow 3\sin^4 2x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 3\sin^4 2x+\frac{1}{2}\sin^2 2x-1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin^2 x=-\frac{2}{3}(\text{loại})\\ \sin^2 x=\frac{1}{2}(\text{nhận do}\neq 0)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-\cos 4x)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 4x=0$

$\Leftrightarrow 4x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}(k\in Z)$

Bài 75 : Giải phương trình

$$\sin^8 x+\cos^8 x=2\left(\sin^{10} x+\cos^{10} x\right)+\frac{5}{4}\cos 2x\,(*)$$

Ta có : (*)

$\Leftrightarrow \left(\sin^8 x-2\sin^{10} x\right)+\left(\cos^8 x-2\cos^{10} x\right)=\frac{5}{4}\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin^8 x\left(1-2\sin^2 x\right)-\cos^8 x\left(-1+2\cos^2 x\right)=\frac{5}{4}\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin^8 x.\cos 2x-\cos^8 x\cos 2x=\frac{5}{4}\cos 2x$

$\Leftrightarrow 4\cos 2x\left(\sin^8 x-\cos^8 x\right)=5\cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x=0\ \text{ hay }\ 4\left(\sin^8 x-\cos^8 x\right)=5$

$\Leftrightarrow \cos 2x=0\ \text{ hay }\ 4\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)=5$

$\Leftrightarrow \cos 2x=0\ \text{ hay }\ 4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)=5$

$\Leftrightarrow \cos 2x=0\ \text{ hay}-2\sin^2 2x=1(\text{Vô nghiệm})$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

Cách khác: Ta có $4\left(\sin^8 x-\cos^8 x\right)=5$ **vô nghiệm**

Vì $\left(\sin^8 x - \cos^8 x\right) \le 1, \forall x$ nên $4\left(\sin^8 x - \cos^8 x\right) \le 4 < 5, \forall x$

Ghi chú : Khi gặp phương trình lượng giác dạng R(tgx, cotgx, sin2x, cos2x, tg2x) với R hàm hữu tỷ thì đặt t = tgx

Lúc đó $tg2x = \dfrac{2t}{1-t^2}, \sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \cos 2x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Bài 76 : (Để thi tuyển sinh Đại học khối A, năm 2003)
Giải phương trình

$$\cot gx - 1 = \frac{\cos 2x}{1+tgx} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x \, (*)$$

Điều kiện : $\sin 2x \ne 0$ và $tgx \ne -1$

Đặt t = tgx thì (*) thành :

$$\frac{1}{t} - 1 = \frac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{1+t} + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}\right] - \frac{1}{2}.\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-t}{t} = \frac{1-t}{1+t^2} + \frac{1}{2}.\frac{2t^2}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} \left(\text{do } t \ne -1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-t}{t} = \frac{t^2-2t+1}{1+t^2} = \frac{(1-t)^2}{1+t^2}$$

$$\Leftrightarrow (1-t)\left(1+t^2\right) = (1-t)^2 t$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-t=0 \\ 1+t^2 = (1-t)t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \; (\text{nhận do } t \ne -1) \\ 2t^2 - t + 1 = 0 \, (\text{vô nghiệm}) \end{array}\right.$$

Vậy (*) $\Leftrightarrow tgx = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ (nhận do $\sin 2x = 1 \ne 0$)

Bài 77 : Giải phương trình: $\sin 2x + 2tgx = 3 \; (*)$

Điều kiện : $\cos x \ne 0$

Đặt t = tgx thì (*) thành :

$$\frac{2t}{1+t^2} + 2t = 3$$

$$\Leftrightarrow 2t + (2t-3)\left(1+t^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 + 4t - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\left(2t^2 - t + 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ 2t^2 - t + 3 = 0 \; (\text{vô nghiệm}) \end{array}\right.$$

Vậy (*) $\Leftrightarrow tgx = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \; (k \in Z)$

Bài 78 : Giải phương trình

$$\cot gx - tgx + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}\,(*)$$

Điều kiện : $\sin 2x \neq 0$

Đặt $t = tgx$ thì : $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$ do $\sin 2x \neq 0$ nên $t \neq 0$

(*) thành : $\frac{1}{t} - t + \frac{8t}{1+t^2} = \frac{1+t^2}{t} = \frac{1}{t} + t$

$$\Leftrightarrow \frac{8t}{1+t^2} = 2t$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{1+t^2} = 1 \ (\text{do } t \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 3 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{3} \ (\text{nhận do } t \neq 0)$$

Vậy (*) $\Leftrightarrow tgx = tg\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Bài 79 : Giải phương trình

$$(1 - tgx)(1 + \sin 2x) = 1 + tgx\,(*)$$

Điều kiện : $\cos x \neq 0$

Đặt = tgx thì (*) thành :

$$(1-t)\left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right) = 1 + t$$

$$\Leftrightarrow (1-t)\frac{(t+1)^2}{1+t^2} = 1 + t$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ \frac{(1-t)(1+t)}{1+t^2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ 1 - t^2 = 1 + t^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \vee t = 0$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = -1 \\ tgx = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ hay } x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 80 : Cho phương trình $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0\,(*)$

a/ Giải phương trình khi $m = \frac{3}{2}$

b/ Tìm m để (*) có nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

Ta có (*) $2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0$

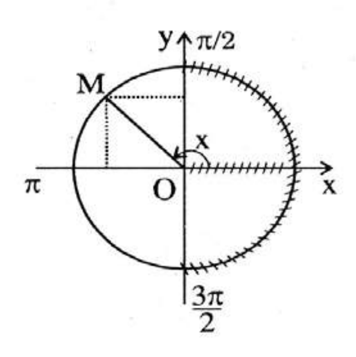
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos x \quad ([t] \le 1) \\ 2t^2 - (2m+1)t + m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos x \quad ([t] \le 1) \\ t = \frac{1}{2} \vee t = m \end{cases}$$

a/ Khi $m = \frac{3}{2}$, phương trình thành

$\cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = \frac{3}{2}$ (loại)

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in Z)$



b/ Khi $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\cos x = t \in [-1, 0)$

Do $t = \frac{1}{2} \notin [-1, 0]$ nên

(*) có nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow m \in [-1, 0)$

Bài 81 : Cho phương trình

$$(\cos x + 1)(\cos 2x - m\cos x) = m\sin^2 x \, (*)$$

a/ Giải (*) khi m= -2

b/ Tìm m sao cho (*) có đúng hai nghiệm trên $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

Ta có (*) $\Leftrightarrow (\cos x + 1)(2\cos^2 x - 1 - m\cos x) = m(1 - \cos^2 x)$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)\left[2\cos^2 x - 1 - m\cos x - m(1 - \cos x)\right] = 0$$

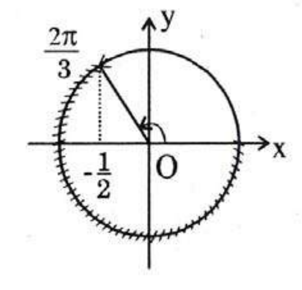
$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(2\cos^2 x - 1 - m) = 0$$

a/ Khi m = -2 thì (*) thành :

$(\cos x + 1)(2\cos^2 x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ cosx = -1

$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in Z)$



b / Khi $x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ thì $\cos x = t \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

Nhận xét rằng với mỗi t trên $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ ta chỉ tìm được duy nhất một x trên $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2t^2 - 1 - m = 0$ có đúng hai nghiệm trên $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

Xét $y = 2t^2 - 1(P)$ và $y = m(d)$

Ta có y' = 4t

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0		1	
y'			$-$	0	$+$		
y		$-\frac{1}{2}$	↘	-1	↗	1	(d)

Vậy (*) có đúng hai nghiệm trên $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

$\Leftrightarrow$ (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt trên $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

$\Leftrightarrow -1 < m \le \frac{1}{2}$

Bài 82 : Cho phương trình $(1-a)tg^2x - \frac{2}{\cos x} + 1 + 3a = 0 (1)$

a/ Giải (1) khi $a = \frac{1}{2}$

b/ Tìm a để (1) có nhiều hơn một nghiệm trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Điều kiện : $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$

$(1) \Leftrightarrow (1-a)\sin^2 x - 2\cos x + (1+3a)\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow (1-a)(1-\cos^2 x) - 2\cos x + (1+3a)\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow 4a\cos^2 x - 2\cos x + 1 - a = 0$

$\Leftrightarrow a(4\cos^2 x - 1) - (2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)\left[a(2\cos x + 1) - 1\right] = 0$

a/ Khi $a = \frac{1}{2}$ thì (1) thành : $(2\cos x - 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ (nhận do $\cos x \ne 0$)

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \, (k \in Z)$

b/ Khi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x = t \in (0, 1)$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = t = \dfrac{1}{2} \in (0,1) \\ 2a\cos x = 1 - a(2) \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán ⇔ (2) có nghiệm trên $(0,1) \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 0 < \dfrac{1-a}{2a} < 1 \\ \dfrac{1-a}{2a} \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \dfrac{1-a}{2a} > 0 \\ \dfrac{1-3a}{2a} < 0 \\ 2(1-a) \neq 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ a < 0 \vee a > \dfrac{1}{3} \\ a \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3} < a < 1 \\ a \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

<u>Cách khác</u> : dặt $u = \dfrac{1}{\cos x}$, điều kiện $u \geq 1$; pt thành

$(1-a)(u^2 - 1) - 2u + 1 + 3a = 0 \Leftrightarrow (1-a)u^2 - 2u + 4a = 0$

$\Leftrightarrow (u-2)[(1-a)u - 2a] = 0$

<u>Bài 83</u> : Cho phương trình : $\cos 4x + 6\sin x\cos x = m(1)$

a/ Giải (1) khi m = 1

b/ Tìm m để (1) có hai nghiệm phân biệt trên $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 2x + 3\sin 2x = m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin 2x\left(|t| \leq 1\right) \\ 2t^2 - 3t + m - 1 = 0(2) \end{cases}$$

a/ Khi m = 1 thì (1) thành

$\begin{cases} t = \sin 2x\left(|t| \leq 1\right) \\ 2t^2 - 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin 2x\left(|t| \leq 1\right) \\ t = 0 \vee t = \dfrac{3}{2}(\text{loại}) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

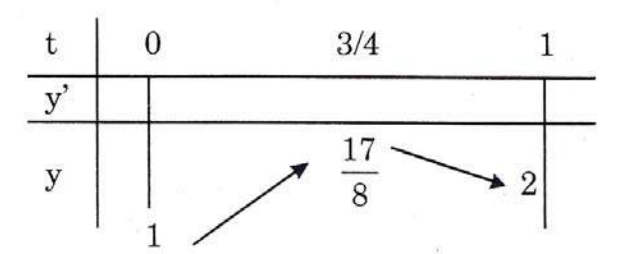
b/ Khi $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ thì $\sin 2x = t \in [0,1]$

Nhận thấy rằng mỗi t tìm được trên $[0,1]$ ta chỉ tìm được duy nhất một $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

Ta có : (2) $\Leftrightarrow -2t^2 + 3t + 1 = m$

Xét $y = -2t^2 + 3t + 1$ trên $[0,1]$

Thì $y' = -4t + 3$



Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (d) $y = m$ cắt tại hai điểm phân biệt trên $[0,1]$

$\Leftrightarrow 2 \le m < \dfrac{17}{8}$

<u>Cách khác</u> :đặt $f(x) = 2t^2 - 3t + m - 1$. Vì $a = 2 > 0$, nên ta có

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 17 - 8m > 0 \\ f(0) = m - 1 \ge 0 \\ f(1) = m - 2 \ge 0 \\ 0 \le \dfrac{S}{2} = \dfrac{3}{4} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le m < \dfrac{17}{8}$

<u>Bài 84</u> : Cho phương trình

$$4\cos^5 x.\sin x - 4\sin^5 x\cos x = \sin^2 4x + m\,(1)$$

a/ Biết rằng $x = \pi$ là nghiệm của (1). Hãy giải (1) trong trường hợp đó.

b/ Cho biết $x = -\dfrac{\pi}{8}$ là một nghiệm của (1). Hãy tìm tất cả nghiệm của (1) thỏa $x^4 - 3x^2 + 2 < 0$

$(1) \Leftrightarrow 4\sin x\cos x\left(\cos^4 x - \sin^4 x\right) = \sin^2 4x + m$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = \sin^2 4x + m$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x = \sin^2 4x + m$

$\Leftrightarrow \sin^2 4x - \sin 4x + m = 0 \qquad (1)$

a/ $x = \pi$ là nghiệm của (1) $\Rightarrow \sin^2 4\pi - \sin 4\pi + m = 0$

$\Rightarrow m = 0$

Lúc đó (1) $\Leftrightarrow \sin 4x\left(1 - \sin 4x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin 4x = 0 \vee \sin 4x = 1$

$\Leftrightarrow 4x = k\pi \vee 4x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{4} \vee x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \left(k \in Z\right)$

b/ $x^4 - 3x^2 + 2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2 \ge 0 \\ t^2 - 3t + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2 \ge 0 \\ 1 < t < 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 1 < x^2 < 2 \Leftrightarrow 1 < |x| < \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < -1 \vee 1 < x < \sqrt{2}\,(*)$

$x = -\frac{\pi}{8}$ thì $\sin 4x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$x = -\frac{\pi}{8}$ là nghiệm của $(1) \Rightarrow 1 + 1 + m = 0$

$\Rightarrow m = -2$

Lúc đó (1) thành : $\sin^2 4x - \sin 4x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin 4x\,(\text{với } |t| \le 1) \\ t^2 - t - 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin 4x\,(\text{với } |t| \le 1) \\ t = -1 \vee t = 2\,(\text{loại}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \sin 4x = -1$

$\Leftrightarrow 4x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$

Kết hợp với điều kiện (*) suy ra k = 1

Vậy (1) có nghiệm $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$ thỏa $x^4 - 3x^2 + 2 < 0$

Bài 85 : Tìm a để hai phương trình sau tương đương

$$2\cos x.\cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x \quad (1)$$

$$4\cos^2 x - \cos 3x = a\cos x + (4 - a)(1 + \cos 2x) \quad (2)$$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \cos 3x + \cos x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$

$\Leftrightarrow \cos x = 1 + \left(2\cos^2 x - 1\right)$

$\Leftrightarrow \cos x(1 - 2\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2}$

Ta có : (2) $\Leftrightarrow 4\cos^2 x - \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) = a\cos x + (4 - a)2\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x + (4 - 2a)\cos^2 x(a - 3)\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 4\cos^2 x + 2(2 - a)\cos x + a - 3 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)[2\cos x + 3 - a] = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = \frac{a - 3}{2}$

Vậy yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a-3}{2}=0 \\ \frac{a-3}{2}=\frac{1}{2} \\ \frac{a-3}{2}<-1 \vee \frac{a-3}{2}>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=4 \\ a<1 \vee a>5 \end{array}\right.$$

Bài 86 : Cho phương trình : $\cos 4x = \cos^2 3x + a\sin^2 x$ (*)
a/ Giải phương trì nh khi a = 1
b/ Tìm a để (*) có nghiệm trên $\left(0, \frac{\pi}{12}\right)$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2}(1+\cos 6x) + \frac{a}{2}(1-\cos 2x)$

$$\Leftrightarrow 2\left(2\cos^2 2x - 1\right) = 1 + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x + a(1-\cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos 2x \quad (|t| \le 1) \\ 2\left(2t^2-1\right) = 1 + 4t^3 - 3t + a(1-t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos 2x \quad (|t| \le 1) \\ -4t^3 + 4t^2 + 3t - 3 = a(1-t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \cos 2x \quad (|t| \le 1) \\ (t-1)\left(-4t^2+3\right) = a(1-t) \quad (**) \end{cases}$$

a/ Khi a = 1 thì (*) thành :

$$\begin{cases} t = \cos 2x \quad (|t| \le 1) \\ (t-1)\left(-4t^2+4\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos 2x \quad (|t| \le 1) \\ t = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \pm 1 \Leftrightarrow \cos^2 2x = 1$$

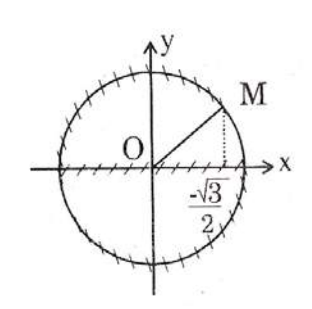
$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, (k \in Z)$$

b/ Ta có : $x \in \left(0, \frac{\pi}{12}\right) \Leftrightarrow 2x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$. Vậy $\cos 2x = t \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

Vậy $(**) \Leftrightarrow (t-1)\left(-4t^2+3\right) = a(1-t)$

$$\Leftrightarrow 4t^2 - 3 = a \quad (\text{do } t \ne 1)$$

Xét $y = 4t^2 - 3$ (P) trên $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$



$$\Rightarrow y' = 8t > 0 \quad \forall t \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$$

Do đó (*) có nghiệm trên $\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow (d): y = a$ cắt (P) trên $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$

$\Leftrightarrow y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < a < y(1)$

$\Leftrightarrow 0 < a < 1$

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau :

a/ $\sin 4x = tgx$

b/ $\sin^4 x + \sin^4 x\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8}$

c/ $tgx + \cot gx = 4$

d/ $\dfrac{\sin x\left(3\sqrt{2} - 2\cos x\right) - 2\sin^2 x - 1}{1 - \sin 2x} = 1$

e/ $4\cos^4 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$

f/ $\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin 2x} = \dfrac{2}{\sin 4x}$

g/ $\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

h/ $\sqrt{2}(2\sin x - 1) = 4(\sin x - 1) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

k/ $\cos\dfrac{4x}{3} = \cos^2 x$

l/ $tg\dfrac{x}{2}.\cos x + \sin 2x = 0$

m/ $1 + 3tgx = 2\sin 2x$

n/ $\cot gx = tgx + 2tg2x$

p/ $2\cos^2\dfrac{3x}{5} + 1 = 3\cos\dfrac{4x}{5}$

q/ $3\cos 4x - 2\cos^2 3x = 1$

r/ $2\cos^2\dfrac{3x}{2} + 1 = 3\cos 2x$

s/ $\cos x + tg\dfrac{x}{2} = 1$

t/ $3tg2x - 4tg3x = tg^2 3x.tg2x$

u/ $\cos x.\cos 4x + \cos 2x.\cos 3x + \cos^2 4x = \dfrac{3}{2}$

v/ $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \dfrac{3}{2}$

w/ $\sin 4x = tgx$

x/ $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{13}{8}\cos^2 2x$

y/ $\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right)$

2. $\sin^6 x + \cos^6 x = a\sin 2x$ (1)
   a/ Giải phương trình khi a = 1.
   b/ Tìm a để (1) có nghiệm (ĐS : $|a| \geq \frac{1}{4}$)

3. Cho phương trình
   $\frac{\cos^6 x + \sin^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 2m\text{tg}2x$ (1)
   a/ Giải phương trình khi m = $\frac{1}{8}$
   b/ Tìm m sao cho (1) có nghiệm (ĐS : $|m| \geq \frac{1}{8}$)

4. Tìm m để phương trình
   $\sin 4x = m\text{tg}x$ có nghiệm $x \neq k\pi$
   $\left(\text{ĐS}: -\frac{1}{2} < m < 4\right)$

5. Tìm m để phương trình :
   $\cos 3x - \cos 2x + m\cos x - 1 = 0$
   có đúng 7 nghiệm trên $\left(-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ $(\text{ĐS}: 1 < m < 3)$

6. Tìm m để phương trình :
   $4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) - 4\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - \sin^2 4x = m$ có nghiệm
   $\left(\text{ĐS}: -\frac{1}{8} \leq m \leq 1\right)$

7. Cho phương trình :
   $6\sin^2 x - \sin^2 x = m\cos^2 2x$ (1)
   a/ Giải phương trình khi m = 3
   b/ Tìm m để (1) có nghiệm $(\text{ĐS}: m \geq 0)$

8. Tìm m để phương trình :
   $\sin^4 x + \cos 4x + \frac{m}{4}\sin 4x - \frac{(2m+1)}{4}\sin^2 x = 0$
   có hai nghiệm phân biệt trên $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$
   $\left(\text{ĐS}: 2\sqrt{5} - 4 < m < \frac{1}{2}\right)$

9. Tìm m để phương trình :
   $\sin^6 x + \cos^6 x = m\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)$ có nghiệm

$\left(ĐS: \frac{1}{2} \le m \le 1\right)$

10. Cho phương trình :
    $\cos 4x = \cos^2 3x + a \sin^2 x$
    Tìm a để phương trình có nghiệm $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$(ĐS: 0 < a < 1)$

CHƯƠNG IV

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT THEO SIN VÀ COSIN

(PHƯƠNG TRÌNH CỔ ĐIỂN)

$a\sin u + b\cos u = c\,(*).\,(a, b \in R \setminus |0|)$

Cách 1 : Chia 2 vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$

Đặt $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ với $\alpha \in [0, 2\pi]$

Thì $(*) \Leftrightarrow \sin u\cos\alpha + \cos u\sin\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\Leftrightarrow \sin(u+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Cách 2 :

Nếu $u = \pi + k2\pi$ là nghiệm của (*) thì :

$a\sin\pi + b\cos\pi = c \Leftrightarrow -b = c$

Nếu $u \neq \pi + k2\pi$ đặt $t = tg\dfrac{u}{2}$ thì (*) thành :

$$a\frac{2t}{1+t^2} + b\frac{1-t^2}{1+t^2} = c$$

$\Leftrightarrow (b+c)t^2 - 2at + c - b = 0\ (1)(\text{với}\ b + c \neq 0)$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = a^2 - (c+b)(c-b) \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2 \geq c^2 - b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$

Giải phương trình (1) tìm được t. Từ $t = tg\dfrac{u}{2}$ ta tìm được u.

Bài 87 : Tìm $x \in \left(\dfrac{2\pi}{5}, \dfrac{6\pi}{7}\right)$ thỏa phương trình : $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}\ (*)$

Chia hai vế của (*) cho 2 ta được :

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 7x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\sin\frac{\pi}{6}\cos 7x + \cos\frac{\pi}{6}\sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(7x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 7x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ hay } 7x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + h2\pi, \quad (k, h \in Z)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} \text{ hay } x = \frac{11\pi}{84} + \frac{h2\pi}{7},\ k, h \in \mathbb{Z}$$

Do $x \in \left(\dfrac{2\pi}{5}, \dfrac{6\pi}{7}\right)$ nên ta phải có :

$$\frac{2\pi}{5} < \frac{5\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} \text{ hay } \frac{2\pi}{5} < \frac{11\pi}{84} + \frac{h2\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} \quad (k, h \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{5}{84} + \frac{k2}{7} < \frac{6}{7} \text{ hay } \frac{2}{5} < \frac{11}{84} + \frac{h2}{7} < \frac{6}{7} \quad (k, h \in \mathbb{Z})$$

Suy ra $k = 2,\ h = 1, 2$

Vậy $x = \frac{5\pi}{84} + \frac{4\pi}{7} = \frac{53}{84}\pi \vee x = \frac{11\pi}{84} + \frac{2\pi}{7} = \frac{35}{84}\pi$

$\vee x = \frac{11\pi}{84} + \frac{4\pi}{7} = \frac{59}{84}\pi$

Bài 88 : Giải phương trình

$$3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x \ (*)$$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow \left(3\sin 3x - 4\sin^3 3x\right) - \sqrt{3}\cos 9x = 1$

$\Leftrightarrow \sin 9x - \sqrt{3}\cos 9x = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 9x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ hay $9x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9}$ hay $x = \frac{7\pi}{54} + \frac{k2\pi}{9}$ $, k \in \mathbb{Z}$

Bài 89 : Giải phương trình

$$\text{tg}x - \sin 2x - \cos 2x + 2\left(2\cos x - \frac{1}{\cos x}\right) = 0 \ (*)$$

Điều kiện : $\cos x \neq 0$

Lúc đó : $(*) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \sin 2x - \cos 2x + 4\cos x - \frac{2}{\cos x} = 0$

$\Leftrightarrow \sin x - \sin 2x\cos x - \cos x\cos 2x + 4\cos^2 x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(1 - 2\cos^2 x\right) - \cos x\cos 2x + 2\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow -\sin x\cos 2x - \cos x\cos 2x + 2\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0$ hay $-\sin x - \cos x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \ \left(\text{nhận do } \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 0 \text{ thì } \cos x \neq 0\right) \\ \sin x + \cos x = 2 \quad \left(\text{vô nghiệm vì } 1^2 + 1^2 < 2^2\right) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow 2x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 90 : Giải phương trình $8\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x}(*)$

Điều kiện : $\sin 2x \neq 0$

Lúc đó $(*) \Leftrightarrow 8\sin^2 x\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow 4(1-\cos 2x)\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow -4\cos 2x\cos x = \sqrt{3}\sin x - 3\cos x$

$\Leftrightarrow -2(\cos 3x + \cos x) = \sqrt{3}\sin x - 3\cos x$

$\Leftrightarrow \cos 3x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x$

$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow 3x = x + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \vee 3x = -x - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2},\ \ k \in \mathbb{Z}$

Nhận so vớiđiều kiện $\sin 2x \neq 0$

<u>Cách khác</u> :

$(*) \Leftrightarrow 8\sin^2 x\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

(hiển nhiên cosx = 0 hay sinx = 0 không là nghiệm của pt này)

$\Leftrightarrow 8(1-\cos^2 x)\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow 8\cos x - 8\cos^3 x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow 6\cos x - 8\cos^3 x = \sqrt{3}\sin x - \cos x$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x = \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow 3x = x + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \vee 3x = -x - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2},\ \ k \in \mathbb{Z}$

Bài 91 : Giải phương trình

$$9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8(*)$$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow 9\sin x + 6\cos x - 6\sin x\cos x + \left(1 - 2\sin^2 x\right) = 8$

$\Leftrightarrow 6\cos x - 6\sin x\cos x - 2\sin^2 x + 9\sin x - 7 = 0$

$\Leftrightarrow 6\cos x(1-\sin x) - 2(\sin x - 1)\left(\sin x - \dfrac{7}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 1-\sin x=0$ hay $6\cos x+2\left(\sin x-\frac{7}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ 6\cos x+2\sin x=7\left(\text{vô nghiệm do } 6^2+2^2<7^2\right)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

<u>Bài 92</u> : Giải phương trình: $\sin 2x+2\cos 2x=1+\sin x-4\cos x(*)$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\left(2\cos^2 x-1\right)=1+\sin x-4\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\sin x+4\cos^2 x+4\cos x-3=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)+4\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos x+\frac{3}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos x-\frac{1}{2}=0$ hay $2\sin x+4\cos x+6=0\left(\text{vô nghiệm do } 2^2+4^2<6^2\right)$

$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$

<u>Bài 93</u> : Giải phương trình

$$2\sin 2x-\cos 2x=7\sin x+2\cos x-4(*)$$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow 4\sin x\cos x-\left(1-2\sin^2 x\right)=7\sin x+2\cos x-4$

$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x-1)+2\sin^2 x-7\sin x+3=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x-1)+2\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)(\sin x-3)$

$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x-1)+(2\sin x-1)(\sin x-3)=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x-1=0$ hay $2\cos x+\sin x-3=0$ $\left(\text{vô nghiệm vì } 1^2+2^2<3^2\right)$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\vee x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

<u>Bài 94</u> : Giải phương trình

$$\sin 2x-\cos 2x=3\sin x+\cos x-2(*)$$

Ta có (*) $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\left(1-2\sin^2 x\right)=3\sin x+\cos x-2$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)+2\sin^2 x-3\sin x+1=0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)+(\sin x-1)(2\sin x-1)=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x-1=0$ hay $\cos x+\sin x-1=0$

$\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$ hay $\sqrt{2}\cos x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ hay $x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ hay $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Bài 95 : Giải phương trình

$$\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 - 5 = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)(*)$$

Đặt $t = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$, Điều kiện $-\sqrt{a^2+b^2} = -2 \le t \le 2 = \sqrt{a^2+b^2}$

Thì $t = 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

Vậy (*) thành:

$t^2 - 5 = \frac{t}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$ (loại) $\vee\ t = -2$

Do đó $(*) \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$

$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$

Bài 96 : Giải phương trình $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0(*)$

Ta có (*) $\Leftrightarrow 2\cos^3 x + 2\cos^2 x - 1 + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x(\cos x + 1) - 1 + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x)(1 + \cos x) - (1 - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \sin x = 0$ hay $2(1 + \sin x)(1 + \cos x) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \sin x = 0$ hay $1 + 2\sin x\cos x + 2(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \sin x = 0$ hay $(\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 1$ hay $\sin x + \cos x = 0$ hay $\sin x + \cos x + 2 = 0$ (vô nghiệm do: $1^2 + 1^2 < 2^2$)

$\Leftrightarrow \sin x = 1$ hay $\text{tg}x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ hay $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Bài 97 : Giải phương trình $1 + \cot g2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}(*)$

Điều kiện : $\sin 2x \ne 0 \Leftrightarrow \cos 2x \ne \pm 1$

Ta có (*)

$\Leftrightarrow 1 + \cot g2x = \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos^2 2x} = \frac{1}{1 + \cos 2x}$

$\Leftrightarrow \cot g2x = \frac{1}{1 + \cos 2x} - 1$

$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{-\cos 2x}{1 + \cos 2x}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\left(\text{nhận do} \neq \pm 1\right)\\ \dfrac{1}{\sin 2x} = \dfrac{-1}{1+\cos 2x}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee 1 + \cos 2x = -\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \sin 2x + \cos 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \vee 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x == -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee 2x = \pi + k2\pi\left(\text{loại}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

<u>Bài 98</u> : Giải phương trình $4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) + \sqrt{3}\sin 4x = 2\left(*\right)$

Ta có : (*)

$$\Leftrightarrow 4\left[\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right] + \sqrt{3}\sin 4x = 2$$

$$\Leftrightarrow 4\left[1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right] + \sqrt{3}\sin 4x = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x + \sqrt{3}\sin 4x = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 4x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow 4x = \pi + k2\pi \text{ hay } 4x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ hay } x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

<u>Cách khác</u> :

$$(*) \Leftrightarrow 2\left(1 - \sin^2 2x\right) + \sqrt{3}\sin 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + 2\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \cot g2x = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Bài 99 : Giải phương trình $1+\sin^3 2x+\cos^3 2x=\frac{1}{2}\sin 4x\,(*)$

Ta có (*) $\Leftrightarrow 1+(\sin 2x+\cos 2x)(1-\sin 2x\cos 2x)=\frac{1}{2}\sin 4x$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin 4x+(\sin 2x+\cos 2x)\left(1-\frac{1}{2}\sin 4x\right)=0$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin 4x=0$ hay $1+\sin 2x+\cos 2x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 4x=2\,(\text{loại})\\ \sin 2x+\cos 2x=-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})=-1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin(-\frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.(k\in Z)$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Bài 100 : Giải phương trình

$$\text{tg}x-3\cot gx=4\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)(*)$$

Điều kiện $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0$

Lúc đó : (*) $\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}-3\frac{\cos x}{\sin x}=4\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$

$\Leftrightarrow \sin^2 x-3\cos^2 x=4\sin x\cos x\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x-2\sin 2x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-\sqrt{3}\cos x\\ \frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin 2x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{tg}x=-\sqrt{3}=\text{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\\ \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\vee x-\frac{\pi}{3}=2x+k2\pi\vee x-\frac{\pi}{3}=\pi-2x+k2\pi,\ k\in Z$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}-k2\pi \vee x=\frac{4\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi \vee x=\frac{4\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}\left(\text{nhận do } \sin 2x\neq 0\right)$$

Bài 101 : Giải phương trình $\sin^3 x+\cos^3 x=\sin x-\cos x\,(*)$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \sin^3 x-\sin x+\cos^3 x+\cos x=0$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\sin^2 x-1\right)+\cos^3 x+\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow -\sin x\cos^2 x+\cos^3 x+\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \text{ hay } -\sin x\cos x+\cos^2 x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ -\sin 2x+\cos 2x=-3\left(\text{vô nghiệm do } 1+1<9\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\left(2k+1\right)\frac{\pi}{2},\ k\in Z$$

Bài 102 : Giải phương trình $\cos^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}(*)$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(1+\cos 2x\right)^2+\frac{1}{4}\left[1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2=\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \left(1+\cos 2x\right)^2+\left(1+\sin 2x\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+\sin 2x=-1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{3\pi}{4}+k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z$$

Bài 103 : Giải phương trình $4\sin^3 x.\cos 3x+4\cos^3 x.\sin 3x+3\sqrt{3}\cos 4x=3(*)$

Ta có : (*)

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 x\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)+4\cos^3 x\left(3\sin x-4\sin^3 x\right)+3\sqrt{3}\cos 4x=3$$

$$\Leftrightarrow -12\sin^3 x\cos x+12\sin x\cos^3 x+3\sqrt{3}\cos 4x=3$$

$$\Leftrightarrow 4\sin x\cos x\left(-\sin^2 x+\cos^2 x\right)+\sqrt{3}\cos 4x=1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x+\sqrt{3}\cos 4x=1$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x+\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos 4x=1$$

$\Leftrightarrow \sin 4x.\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos 4x=\cos\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 4x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \vee 4x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\vee x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

Bài 104 : Cho phương trình : $2\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x=m\,(*)$

a/ Tìm m sao cho phương trình có nghiệm

b/ Giải phương trình khi m = -1

Ta có : (*) $\Leftrightarrow (1-\cos 2x)-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=m$

$\Leftrightarrow \sin 2x+3\cos 2x=-2m+1$

a/ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+b^2\ge c^2$

$\Leftrightarrow 1+9\ge(1-2m)^2$

$\Leftrightarrow 4m^2-4m-9\le 0$

$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{10}}{2}\le m\le\frac{1+\sqrt{10}}{2}$

b/ Khi m = -1 ta được phương trình

$\sin 2x+3\cos 2x=3\ (1)$

- Nếu $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ thì $\sin 2x=0$ và $\cos 2x=-1$ nên phương trình (1) không thỏa.

- Nếu $x\ne(2k+1)\frac{\pi}{2}$ thì $\cos x\ne 0$, đặt $t=tgx$

(1) thành $\frac{2t}{1+t^2}+\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}=3$

$\Leftrightarrow 2t+3(1-t^2)=3(t^2+1)$

$\Leftrightarrow 6t^2-2t=0$

$\Leftrightarrow t=0\vee t=3$

Vậy (1) $\Leftrightarrow$ $tgx=0$ hay $tgx=3=tg\varphi \Leftrightarrow x=k\pi$ hay $x=\varphi+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Bài 105 : Cho phương trình $\frac{5+4\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{\sin x}=\frac{6tg\alpha}{1+tg^2\alpha}\,(*)$

a/ Giải phương trình khi $\alpha=-\frac{\pi}{4}$

b/ Tìm α để phương trình (*) có nghiệm

Ta có : $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$

$\frac{6tg\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{6\sin\alpha}{\cos\alpha}.\cos^2\alpha=3\sin 2\alpha$ với $\cos\alpha\neq 0$

Vậy : $(*)\Leftrightarrow\frac{5-4\cos x}{\sin x}=3\sin 2\alpha$ (điều kiện $\sin x\neq 0$ và $\cos\alpha\neq 0$)

$\Leftrightarrow 3\sin 2\alpha\sin x+4\cos x=5$

a/ Khi $\alpha=-\frac{\pi}{4}$ ta được phương trình

$-3\sin x+4\cos x=5(1)$ (Hiển nhiên sin x = 0 không là nghiệm của (1))

$\Leftrightarrow -\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x=1$

Đặt $\cos\varphi=-\frac{3}{5}$ và $\sin\varphi=\frac{4}{5}$ với $0<\varphi<2\pi$

Ta có pt (1) thành :

$\sin(\varphi+x)=1$

$\Leftrightarrow \varphi+x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$

$\Leftrightarrow x=-\varphi+\frac{\pi}{2}+k2\pi$

b/ (**) có nghiệm $\Leftrightarrow (3\sin 2\alpha)^2+16\geq 25$ và $\cos\alpha\neq 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2\alpha\geq 1$ và $\cos\alpha\neq 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2\alpha=1$

$\Leftrightarrow \cos 2\alpha=0$

$\Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau :

a/ $2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\cos x=3+\cos 2x$

b/ $(2\cos x-1)(\sin x+\cos x)=1$

c/ $2\cos 2x=\sqrt{6}(\cos x-\sin x)$

d/ $3\sin x=3-\sqrt{3}\cos x$

e/ $2\cos 3x+\sqrt{3}\sin x+\cos x=0$

f/ $\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sin 2x+\cos x+\sin x$

g/ $\cos x+\sqrt{3}\sin x=\frac{3}{\cos x+\sqrt{3}\sin x+1}$

h/ $\sin x+\cos x=\cos 2x$

k/ $4\sin^3 x-1=3\sin x-\sqrt{3}\cos 3x$

i / $3\cos x+4\sin x+\frac{6}{3\cos x+4\sin x+1}=6$

j/ $\cos 7x\cos 5x-\sqrt{3}\sin 2x=1-\sin 7x\sin 5x$

m/ $4\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)+\sqrt{3}\sin 4x=2$

p/ $\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin^2 x$

q/ $4\sin 2x-3\cos 2x=3\left(4\sin x-1\right)$

r/ $tgx-\sin 2x-\cos 2x=-4\cos x+\dfrac{2}{\cos x}$

s/ $\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x-2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\cos x-1}=1$

2. Cho phương trình cosx + msinx = 2 (1)

a/ Giải phương trình $m=\sqrt{3}$

b/ Tìm các giá trị m để (1) có nghiệm (ĐS : $\left|m\right|\geq\sqrt{3}$)

3. Cho phương trình :

$\dfrac{m\sin x-2}{m-2\cos x}=\dfrac{m\cos x-2}{m-2\sin x}\quad (1)$

a/ Giải phương trình (1) khi m = 1

b/ Khi $m\neq 0$ và $m\neq\sqrt{2}$ thì (1) có bao nhiêu nghiệm trên $\left[20\pi,30\pi\right]$?

(ĐS : 10 nghiệm)

4. Cho phương trình

$\dfrac{2\sin x+\cos x+1}{\sin x-2\cos x+3}=a\quad (1)$

a/ Giải (1)khi $a=\dfrac{1}{3}$

b/ Tìm a để (1) có nghiệm

CHƯƠNGV.
PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG THEO SINX, COSX

$a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x = c \quad (1)$

Cách giải

Đặt $t = \sin x + \cos x$ với điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$

Thì $t = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Ta có : $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$ nên (1) thành

$at + \frac{b}{2}\left(t^2 - 1\right) = c$

$\Leftrightarrow bt^2 + 2at - b - 2c = 0$

Giải (2) tìm được t, rồi so với điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$

giải phương trình $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = t$ ta tìm được x

<u>Bài 106</u> : Giải phương trình $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0(*)$

$(*) \Leftrightarrow \sin x(1 + \sin x) + \cos x\left(1 - \sin^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow (1 + \sin x) = 0$ hay $\sin x + \cos x(1 - \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = -1 & (1) \\ \sin x + \cos x - \sin x\cos x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

$\bullet(1) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi(k \in Z)$

$\bullet$Xét(2) : đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$ thì $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

Vậy (2) thành $t - \frac{t^2 - 1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 - \sqrt{2} \\ t = 1 + \sqrt{2}\,(\text{loại}) \end{array}\right.$$

Do đó (2) $\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \cos\varphi$ với $0 < \varphi < 2\pi$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm\varphi + h2\pi, h \in \mathbb{Z}$, với $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \varphi + h2\pi, h \in \mathbb{Z}$, với $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

Bài 107 : Giải phương trình $-1+\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{3}{2}\sin 2x\,(*)$

$(*)\Leftrightarrow -1+(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=\frac{3}{2}\sin 2x$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$

Thì $t^2=1+2\sin x\cos x$

Vậy (*) thành : $-1+t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=\frac{3}{2}\left(t^2-1\right)$

$\Leftrightarrow -2+t\left(3-t^2\right)=3\left(t^2-1\right)$

$\Leftrightarrow t^3+3t^2-3t-1=0$

$\Leftrightarrow (t-1)\left(t^2+4t+1\right)=0$

$\Leftrightarrow t=1\vee t=-2+\sqrt{3}\vee t=-2-\sqrt{3}\,(\text{loại})$

với t = 1 thì $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}=k2\pi\vee x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=k2\pi\vee x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

với $t=\sqrt{3}-2$ thì $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}}=\sin\varphi$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\varphi+m2\pi\vee x+\frac{\pi}{4}=\pi-\varphi+m2\pi, m\in\mathbb{Z}$, với $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}}=\sin\varphi$

$\Leftrightarrow x=\varphi-\frac{\pi}{4}+m2\pi\vee x=\frac{3\pi}{4}-\varphi+m2\pi, m\in\mathbb{Z}$, với $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}}=\sin\varphi$

Bài 108 :Giải phương trình $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x\,(*)$

Điều kiện $\begin{cases}\sin x\ne 0\\ \cos x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\ne 0$

Lúc đó (*) $\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin x\cos x}$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Thì $t^2=1+2\sin x\cos x$ với $|t|\le\sqrt{2}$ và $t^2\ne 1$

(*) thành $\sqrt{2}t=\frac{2}{t^2-1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}t^3 - \sqrt{2}t - 2 = 0$
(Hiển nhiên $t = \pm 1$ không là nghiệm)
$\Leftrightarrow \left(t - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}t^2 + 2t + \sqrt{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t^2 + \sqrt{2}t + 1 = 0 \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right.$

Vậy $(*) \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

<u>Bài 109</u> : Giải phương trình $3(\cot gx - \cos x) - 5(tgx - \sin x) = 2(*)$

Với điều kiện $\sin 2x \neq 0$, nhân 2 vế phương trình cho sinxcosx$\neq 0$ thì :
$(*) \Leftrightarrow 3\cos^2 x(1 - \sin x) - 5\sin^2 x(1 - \cos x) = 2\sin x\cos x$
$\Leftrightarrow 3\cos^2 x(1 - \sin x) - 5\sin^2 x(1 - \cos x) = 5\sin x\cos x - 3\sin x\cos x$
$\Leftrightarrow 3\cos x\left[\cos x(1 - \sin x) + \sin x\right] - 5\sin x\left[\sin x(1 - \cos x) + \cos x\right] = 0$
$\Leftrightarrow 3\cos x(\cos x - \sin x\cos x + \sin x) - 5\sin x(\sin x - \sin x\cos x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x + \cos x - \sin x\cos x = 0 & (1) \\ 3\cos x - 5\sin x = 0 & (2) \end{array}\right.$

(**<u>Ghi chú:</u>** A.B + A.C = A.D $\Leftrightarrow$ A = 0 hay B + C = D)
Giải (1) Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Thì $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$ với điều kiện : $|t| \leq \sqrt{2}$ và $t \neq \pm 1$

(1) thành : $t - \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 + \sqrt{2} \left(\text{loại do } |t| \leq \sqrt{2}\right) \\ t = 1 - \sqrt{2} \text{(nhận so với điều kiện)} \end{array}\right.$

Vậy $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} = \sin\alpha \quad (0 < \alpha < 2\pi)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \alpha + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$(2) \Leftrightarrow \text{tgx} = \frac{3}{5} = \text{tg}\beta \Leftrightarrow x = \beta + h\pi, h \in \mathbb{Z}$ (với $0 < \beta < \pi$)

Bài 110 : Giải phương trình

$$3\text{tg}^3x - \text{tgx} + \frac{3(1+\sin x)}{\cos^2 x} = 8\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \ (*)$$

Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1$

Lúc đó : $(*) \Leftrightarrow \text{tgx}(3\text{tg}^2x - 1) + 3(1+\sin x)(1+\text{tg}^2x) = 4\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$

$= 4(1+\sin x)$

$\Leftrightarrow \text{tgx}(3\text{tg}^2x - 1) + (1+\sin x)\left[3(1+\text{tg}^2x) - 4\right] = 0$

$\Leftrightarrow (3\text{tg}^2x - 1)(\text{tgx} + 1 + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (3\text{tg}^2x - 1)(\sin x + \cos x + \sin x\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3\text{tg}^2x = 1 & (1) \\ \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0 & (2) \end{array}\right.$

$\bullet(1) \Leftrightarrow \text{tg}^2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{tgx} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$

$\bullet$Giải (2) đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$ và $t \neq \pm 1$

Thì $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

(2) thành : $t + \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 - \sqrt{2} \ (\text{loại do điều kiện } |t| \leq \sqrt{2}) \\ t = -1 + \sqrt{2} \ (\text{nhận so với điều kiện}) \end{array}\right.$

Vậy $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = \sin\varphi$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \varphi - \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} - \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Bài 111 : Giải phương trình $2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x + \cos 2x \ (*)$

$(*) \Leftrightarrow 2(\sin^3 x - \cos^3 x) - (\sin x - \cos x) + \sin^2 x - \cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0$ hay $2(1 + \sin x \cos x) - 1 + (\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0 (1) \\ \sin x + \cos x + \sin 2x + 1 = 0 (2) \end{array}\right.$

$\bullet (1) \Leftrightarrow tgx = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\bullet$xét (2) đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos x\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện : $|t| \le \sqrt{2}$

$t^2 = 1 + \sin 2x$

Vậy (2) thành $t + (t^2 - 1) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow t(t+1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = -1$

Khi $t = 0$ thì $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Khi $t = -1$ thì $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ hay $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 112 : Giải phương trình

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x \, (*)$$

Ta có : (*)

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x) + (\sin^2 x - \cos^2 x) + (\sin^3 x - \cos^3 x) + (\sin^4 x - \cos^4 x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x) = 0$ hay $1 + (\sin x + \cos x) + (1 + \sin x.\cos x) + (\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0 (1) \\ 2(\sin x + \cos x) + \sin x \cos x + 2 = 0 (2) \end{array}\right.$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow tgx = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Xét (2) : đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$

Thì $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

(2) thành $2t + \frac{t^2-1}{2} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = 0$

$\Leftrightarrow t = -1 \vee t = -3$ (loại)

khi t = -1 thì $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Bài 113 : Giải phương trình $tg^2x\left(1 - \sin^3 x\right) + \cos^3 x - 1 = 0\left(*\right)$

Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1$

Lúc đó (*) $\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\left(1 - \sin^3 x\right) + \cos^3 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(1 - \cos^2 x\right)\left(1 - \sin^3 x\right) - \left(1 - \cos^3 x\right)\left(1 - \sin^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(1 - \cos x\right)\left(1 - \sin x\right) = 0$

hay $\left(1 + \cos x\right)\left(1 + \sin x + \sin^2 x\right) - \left(1 + \cos x + \cos^2 x\right)\left(1 + \sin x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \left(\text{nhận do điều kiện}\right) \\ \sin x = 1 \left(\text{loại do điều kiện}\right) \\ \sin^2 x + \sin^2 x\cos x - \cos^2 x - \sin x\cos^2 x = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \sin^2 x - \cos^2 x + \sin x\cos x\left(\sin x - \cos x\right) = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \sin x - \cos x = 0 \text{ hay } \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \vee tgx = 1 \\ \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0 \end{array}\right.$

xét pt $\sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0$

đặt

$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(\text{điều kiện } |t|\le\sqrt{2} \text{ và } t\ne\pm1\right)$

$\Rightarrow t^2=1+2\sin x\cos x$

Ta được phương trình $t+\frac{t^2-1}{2}=0\Leftrightarrow t^2+2t-1=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-1-\sqrt{2}\,(\text{loại}) \\ t=-1+\sqrt{2}\,(\text{nhận so với đk}) \end{array}\right.$

Vậy $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\cos\varphi$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\pm\varphi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\pm\varphi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Bài 114 : Cho phương trình $m(\sin x+\cos x+1)=1+\sin 2x\,(*)$

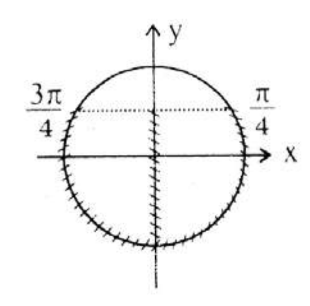
Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc đoạn $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$

Thì $t^2=1+\sin 2x$

Vậy (*) thành : $m(t+1)=t^2$

Nếu $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ thì $\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$



Do đó $\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le1$

$\Leftrightarrow 1\le t\le\sqrt{2}$

ta có $m(t+1)=t^2$

$\Leftrightarrow m=\frac{t^2}{t+1}$ (do t = -1 không là nghiệm của phương trình)

Xét $y=\frac{t^2}{t+1}$ trên $\left[1,\sqrt{2}\right]$

Thì $y'=\frac{t^2+2t}{(t+1)^2}>0\ \forall t\in\left[1,\sqrt{2}\right]$

Vậy y tăng trên $\left[1,\sqrt{2}\right]$

Vậy (*) có nghiệm trên $\left[1,\frac{\pi}{2}\right]\Leftrightarrow y(1)\le m\le y\left(\sqrt{2}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le m\le 2\left(\sqrt{2}-1\right)$

Bài 115 : Cho phương trình $\cos^3 x + \sin^3 x = m\sin x\cos x\,(*)$

a/ Giải phương trình khi $m = \sqrt{2}$

b/ Tìm m để (*) có nghiệm

Ta có : (*) $\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \sin x\cos x) = m\sin x\cos x$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos x\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $\left(|t| \le \sqrt{2}\right)$

Thì $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

Vậy (*) thành $t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = m\left(\frac{t^2 - 1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow t(3 - t^2) = m(t^2 - 1)$

a/ Khi $m = \sqrt{2}$ ta có phương trình

$t(3 - t^2) = \sqrt{2}\left((t^2 - 1)\right)$

$\Leftrightarrow t^3 + \sqrt{2}t^2 - 3t - \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow \left(t - \sqrt{2}\right)\left(t^2 + 2\sqrt{2}t + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow t = \sqrt{2}$ hay $t = -\sqrt{2} + 1$ hay $t = -\sqrt{2} - 1$ (loại)

Vậy • $\cos x\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

• $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \cos\alpha$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b/ Xét phương trình $t(3 - t^2) = k(t^2 - 1)(**)$

Do $t = \pm 1$ không là nghiệm của (**) nên

$(**) \Leftrightarrow m = \frac{3t - t^3}{t^2 - 1}$

Xét $y = \frac{3t - t^3}{t^2 - 1}(C)$ trên $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \setminus \{\pm 1\}$

Ta có $y' = \frac{-t^4 - 3}{\left(t^2 - 1\right)^2} < 0 \forall t = \pm 1$

suy ra y giảm trên $(-1, 1)$ và

$\lim_{x \to -1^+} y = +\infty, \lim_{x \to 1^-} y = -\infty$

Do đó trên $(-1, 1) \subset \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \setminus \{\pm 1\}$ ta có

(d) y = m cắt (C) $y = \frac{3t - t^3}{t^2 - 1}$ với $\forall m \in R$

Vậy (*) có nghiệm $\forall m \in R$

Bài 116 : Cho phương trình

$$m(\sin x+\cos x)+1+\frac{1}{2}\left(tgx+\cot gx+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right)=0(*)$$

a/ Giải phương trình khi $m=\frac{1}{2}$

b/ Tìm m để (*) có nghiệm trên $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Với điều kiện $\sin 2x\neq 0$ ta có

$$(*)\Leftrightarrow m(\sin x+\cos x)+1+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow m\sin 2x(\sin x+\cos x)+\sin 2x+(1+\cos x+\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow m\sin 2x(\sin x+\cos x)+\sin 2x+1+\cos x+\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow m\sin 2x(\sin x+\cos x)+(\sin x+\cos x)^2+\sin x+\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0(1)\\ m\sin 2x+\sin x+\cos x+1=0(2)\end{array}\right.$$

Xét (2) đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Thì $t^2=1+\sin 2x$

Do $\sin 2x\neq 0$ nên $|t|\leq\sqrt{2}$ và $t=\pm 1$

Vậy (*) thành : $\left[\begin{array}{l}t=0\\ m(t^2-1)+t+1=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=0\ (\text{nhận so điều kiện}) & \\ m(t-1)+1=0 & (\text{ do } t\neq -1)\end{array}\right.$$

a/ Khi $m=\frac{1}{2}$ thì ta được :

$$\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=-1(\text{loại do điều kiện})\end{array}\right.$$

Vậy sinx + cosx = 0

$\Leftrightarrow tgx=-1$

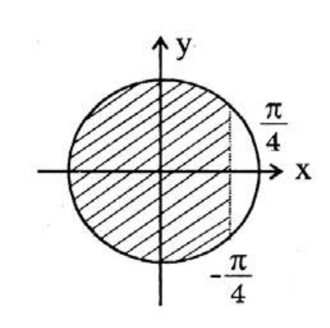
$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

b/ Ta có : $0<x<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}<x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$

Lúc đó

$\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leq 1\Rightarrow 1<t\leq\sqrt{2}$

Do $t=0\notin\left(1,\sqrt{2}\right]$



Nên ta xét phương trình : $m(t-1)+1=0(**)$

$(**)\Leftrightarrow mt=m-1$

$\Leftrightarrow t=1-\dfrac{1}{m}$ (do m = 0 thì (**) vô nghiệm)

Do đó : yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 1<1-\dfrac{1}{m}\le\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{m}>0\\1-\sqrt{2}\le\dfrac{1}{m}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\m\le\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}-1\end{cases}$$

$\Leftrightarrow m\le-\sqrt{2}-1$

Bài 117 : Cho $f(x)=\cos^2 2x+2(\sin x+\cos x)^3-3\sin 2x+m$

a/ Giải phương trình f(x) = 0 khi m = -3

b/ Tính theo m giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của f(x)

Tìm m cho $\left[f(x)\right]^2\le 36\ \forall x\in R$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ (điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$)

Thì $t^2=1+\sin 2x$

Và $\cos^2 2x=1-\sin^2 2x=1-(t^2-1)^2=-t^4+2t^2$

Vậy $f(x)$ thành $g(t)=-t^4+2t^2+2t^3-3(t^2-1)+m$

a/ Khi m = -3 thì g(t) = 0

$\Leftrightarrow -t^2(t^2-2t+1)=0$

$\Leftrightarrow t=0\vee t=1$

vậy khi m = -3 thì f(x) = 0

$\Leftrightarrow\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ hay $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{4}=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ hay $x-\dfrac{\pi}{4}=\pm\dfrac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$ hay $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\vee x=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

b/ Ta có $g'(t)=-4t^3+6t^2-2t=-2t(2t^2-3t+1)$

Vậy $\begin{cases}g'(t)=0\\t\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]\end{cases}\Leftrightarrow t=0\vee t=1\vee t=\dfrac{1}{2}$

Ta có : $g(0)=3+m=g(1)$, $\quad g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{47}{16}+m$

$g(\sqrt{2})=4\sqrt{2}-3+m$, $\quad g(\sqrt{2})=m-3-4\sqrt{2}$

Vậy : $\underset{x \in \mathbb{R}}{\text{Max}} f(x) = \underset{t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]}{\text{Max}} g(t) = m + 3$

$\underset{x \in R}{\text{Min}} f(x) = \underset{t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]}{\text{Min}} g(t) = m - 3 - 4\sqrt{2}$

Do đó : $[f(x)]^2 \le 36, \forall x \in R \Leftrightarrow -6 \le f(x) \le 6, \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underset{R}{\text{Max}} f(x) \le 6 \\ \underset{R}{\text{Min}} f(x) \ge -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 \le 6 \\ m - 3 - 4\sqrt{2} \ge -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2} - 3 \le m \le 3$$

Cách khác : Ta có $g(t) = -t^2(t^2 - 2t + 1) + 3 + m = -[t(t-1)]^2 + 3 + m$

Đặt $u = t^2 - t$

Khi $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ thì $u \in \left[-\frac{1}{4}, 2 + \sqrt{2}\right] = D$

Vậy $g(t) = h(u) = -u^2 + 3 + m$

$\underset{R}{\text{Max}} f(x) = \underset{t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]}{\text{Max}} g(t) = \underset{u \in D}{\text{Max}} h(u) = m + 3$

$\underset{R}{\text{Min}} f(x) = \underset{t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]}{\text{Min}} g(t) = \underset{u \in D}{\text{Min}} h(u) = m - 3 - 4\sqrt{2}$

Chú ý 1 : Phương trình giả đối xứng

$a(\sin x - \cos x) + b(\sin x \cos x) = 0$

đặt $t = \sin x - \cos x$

thì $t = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

với điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$ thì $t^2 = 1 - 2\sin x \cos x$

Bài 118 : Giải phương trình $2\sin x + \cot gx = 2\sin 2x + 1 \ (*)$

Điều kiện : $\sin x \ne 0 \Leftrightarrow \cos x = \pm 1$

Lúc đó (*) $\Leftrightarrow 2\sin x + \dfrac{\cos x}{\sin x} = 4\sin x \cos x + 1$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \cos x = 4\sin^2 x \cos x + \sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - \cos x(4\sin^2 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) - \cos x(2\sin x - 1)(2\sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x - 1 = 0$ hay $\sin x - \cos x(2\sin x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\sin x - 1 = 0 & (1) \\ \sin x - \cos x - \sin 2x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

- Ta có $(1) \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ (nhận do $\sin x \neq 0$)

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

- Xét (2) Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$ và $t \neq \pm 1$

Thì $t^2 = 1 - \sin 2x$

Vậy (2) thành : $t - \left(1 - t^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (loại)

Do đó : $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (nhận do $|t| \leq \sqrt{2}$ và $t \neq \pm 1$)

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}} = \sin\varphi$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = \varphi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \varphi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \varphi + \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{4} - \varphi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Bài 119 : Giải phương trình

$$\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)\ (*)$$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\left[2(2 - \cos x) + (\sin x + \cos x)\right] - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)[\sin x - \cos x + 4] - 5 = 0$

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$

(*) thành : $t(t+4) - 5 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = -5$ (loại)

Vậy $(*) \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \vee x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \vee x=\pi+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Bài 120 : Giải phương trình $\cos^3 x+\sin^3 x=\cos 2x\,(*)$

Ta có (*) $\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(1-\sin x\cos x)=\cos^2 x-\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \cos x+\sin x=0$ hay $1-\sin x\cos x=\cos x-\sin x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin x+\cos x=0 & (1)\\ \sin x-\cos x-\sin x\cos x+1=0 & (2)\end{array}\right.$$

Ta có : $(1)\Leftrightarrow \text{tg}x=-1$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Xét (2) đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$

Thì $t^2=1-2\sin x\cos x$

(2) thành $t-\frac{1-t^2}{2}+1=0\Leftrightarrow t^2+2t+1=0$

$\Leftrightarrow t=-1$

vậy $(2)\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Bài 121 : Cho phương trình $\cos^3 x-\sin^3 x=m \quad (1)$

a/ Giải phương trình (1) khi m = 1 bằng cách đặt ẩn phụ $t=\cos x-\sin x$

b/ Tìm m sao cho (1) có đúng hai nghiệm $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

Ta có (1) $\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(1+\sin x\cos x)=m$

Đặt $t=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$

Thì $t^2=1-2\sin x\cos x$

Vậy (1) thành : $t\left(1+\frac{1-t^2}{2}\right)=m$

$\Leftrightarrow t\left(3-t^2\right)=2m \quad (2)$

a/ Khi m = 1 thì (2) thành $t^3 - 3t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t - 2) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = -2$ (loại)

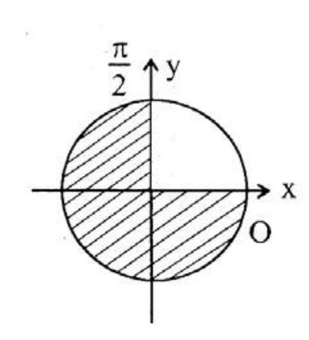
Vậy $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

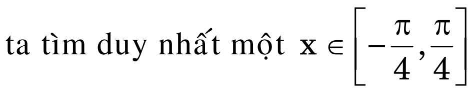
b/ Nếu $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ thì $0 \le x + \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2}$

nên $0 \le \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$

$\Leftrightarrow 0 \le t = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$

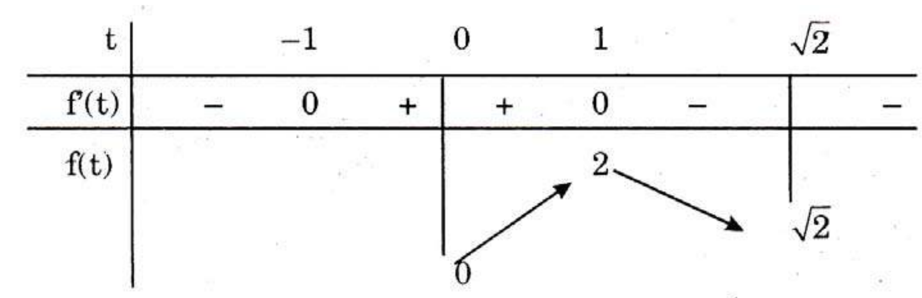


nhận xét rằng với mỗi t tìm được trên $\left[0, \sqrt{2}\right]$


ta tìm duy nhất một $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

xét $f(t) = -t^3 + 3t$ trên $\left[0, \sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow f'(t) = -3t^2 + 3$



t	-1		0		1		$\sqrt{2}$	
f'(t)	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$		$-$
f(t)			0 ↗		2	↘	$\sqrt{2}$	

vậy (1) có đúng hai nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

$\Leftrightarrow$ (d) $y = 2m$ cắt (C) $y = -t^3 + 3t$ trên $\left[0, \sqrt{2}\right]$ tại 2 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow \sqrt{2} \le 2m < 2$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \le m < 1$

Bài 122 : Cho phương trình

$$2\cos 2x + \sin^2 x \cos x + \sin x \cos^2 x = m(\sin x + \cos x)\ (*)$$

a/ Giải phương trình khi m = 2

b/ Tìm m để phương trình (*) có ít nhất một nghiệm trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Ta có :

$(*) \Leftrightarrow 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x \cos x(\sin x + \cos x) = m(\sin x + \cos x)$

$\Leftrightarrow \cos x + \sin x = 0 \quad (1)$ hay $2(\cos x - \sin x) + \sin x \cos x = m \ (2)$

Đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$)

Thì $t^2 = 1 - 2\sin x \cos x$

Ta có : $(1) \Leftrightarrow \sin x = -\cos x$

$\Leftrightarrow tgx = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Ta có : (2) thành $2t + \frac{1 - t^2}{2} = m$

$\Leftrightarrow -t^2 + 4t + 1 = 2m(**)$

a/ Khi m = 2 thì (**) thành $t^2 - 4t + 3 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = 3$ (loại)

vậy $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Do đó :

$(*) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b/ Ta có $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

vậy $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow -1 \le t \le 1$

Do nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \forall\ k \in \mathbb{Z}$

Nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (**)$có nghiệm trên $[-1,1]$

Xét $y = -t^2 + 4t + 1$ thì $y' = -2t + 4 > 0\ \forall t \in [-1,1]$

$\Rightarrow$ y tăng trên $[-1,1]$

Do đó : yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow -4 = y(-1) \le 2m \le y(1) = 4$

$\Leftrightarrow -2 \le m \le 2$

* **<u>Chú ý 2</u> :** Phương trình lượng giác dạng

$a(tgx \pm \cot gx) + b(tg^2x + \cot g^2x) = 0$

ta đặt $t = tgx \pm \cot gx$ thì $t^2 = tg^2x + \cot g^2x \pm 2$

khi $t = tgx + \cot gx = \frac{2}{\sin 2x}$ thì $|t| \ge 2$ (do $|\sin 2x| \le 1$)

<u>Bài 123</u> : Giải phương trình

$3tg^2x + 4tgx + 4\cot gx + 3\cot g^2x + 2 = 0(*)$

Đặt $t = tgx + \cot gx = \dfrac{2}{\sin 2x}$

Với điều kiện $|t| \geq 2$

Thì $t^2 = tg^2x + \cot g^2x + 2$

(*) thành : $3(t^2 - 2) + 4t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2}{3} (\text{loại do điều kiện}) \\ t = -2 \end{array}\right.$$

Ta có : $t = -2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{2\sin x} = -2 \Leftrightarrow \sin 2x = -1$

$\Leftrightarrow 2x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Bài 124 : Giải phương trình

$$tgx + tg^2x + tg^3x + cotgx + cotg^2x + cotg^3x = 6(*)$$

Ta có (*) $\Leftrightarrow (tgx + \cot gx) + (tg^2x + \cot g^2x) + (tg^3x + \cot g^3x) = 6$

$\Leftrightarrow (tgx + \cot gx) + (tgx + \cot gx)^2 - 2 + (tgx + \cot gx)(tg^2x + \cot g^2x - 1) = 6$

$\Leftrightarrow (tgx + \cot gx) + (tgx + \cot gx)^2 + (tgx + \cot gx)\left[(tgx + \cot gx)^2 - 3\right] = 8$

Đặt $t = tgx + \cot gx = \dfrac{2}{\sin 2x}$ (điều kiện $|t| \geq 2$)

Vậy (*) thành : $t + t^2 + t(t^2 - 3) = 8$

$\Leftrightarrow t^3 + t^2 - 2t - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t^2 + 3t + 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t^2 + 3t + 4 = 0 (\text{vô nghiệm}) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow t = 2$

Vậy $\dfrac{2}{\sin 2x} = 2 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Bài 125 : Giải phương trình

$$\frac{2}{\sin^2 x} + 2tg^2x + 5tgx + 5\cot gx + 4 = 0(*)$$

Cách 1 : (*) $\Leftrightarrow 2(1 + \cot g^2x) + 2tg^2x + 5(tgx + \cot gx) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(tg^2x + \cot g^2x\right) + 5\left(tgx + \cot gx\right) + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 2\left[\left(tgx + \cot gx\right)^2 - 2\right] + 5\left(tgx + \cot gx\right) + 6 = 0$

Đặt $t = tgx + \cot gx = \dfrac{2}{\sin 2x}$, với $|t| \geq 2$

Ta được phương trình : $2t^2 + 5t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow t = -2 \vee t = -\dfrac{1}{2}$(loại)

Vậy$(*) \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sin 2x} = -2 \Leftrightarrow \sin 2x = -1$

$\Leftrightarrow 2x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

<u>Cách 2</u> : Đặt $u = tgx$ (với điều kiện $u \neq 0$)

Vậy (*) thành : $2 + \dfrac{2}{u^2} + 2u^2 + 5u + \dfrac{5}{u} + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2 + 2u^4 + 5u^3 + 5u + 6u^2 = 0$

$\Leftrightarrow (u+1)\left(2u^3 + 3u^2 + 3u + 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow (u+1)^2\left(2u^2 + u + 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -1 \text{(nhận)} \\ 2u^2 + u + 2 = 0 \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right.$

Vậy (*) $\Leftrightarrow tgx = -1$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

<u>Bài 126</u> : Cho phương trình

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \cot g^2x + m\left(tgx + \cot gx\right) + 2 = 0 \qquad (1)$$

a/ Giải phương trình khi $m = \dfrac{5}{2}$

b/ Tìm m để phương trình có nghiệm

Ta có : (1) $\Leftrightarrow tg^2x + \cot g^2x + m\left(tgx + \cot gx\right) + 3 = 0$

Đặt $t = tgx + \cot gx = \dfrac{2}{\sin 2x}$ (điều kiện $|t| \geq 2$)

$\Rightarrow t^2 = tg^2x + \cot g^2x + 2$

Vậy (1) thành : $t^2 + mt + 1 = 0 \qquad (2)$

a/ Khi $m = \dfrac{5}{2}$ ta được phương trình $2t^2 + 5t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow t = -2 \vee t = -\frac{1}{2}$ (loại)

Do đó $\frac{2}{\sin 2x} = -2 \Leftrightarrow \sin 2x = -1$

$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b/ **Cách 1** :

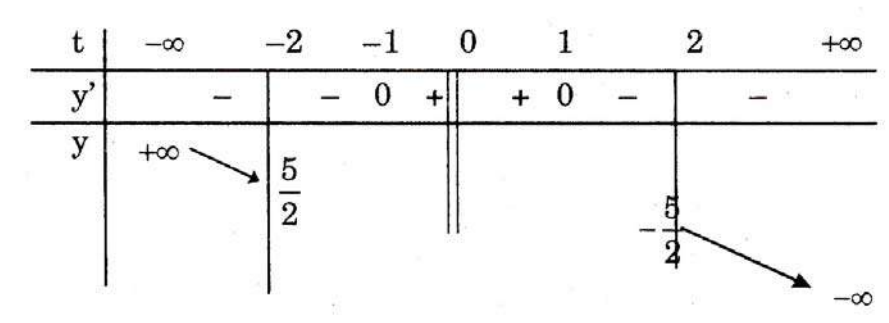
Ta có : (2) $\Leftrightarrow mt = -1 - t^2$

$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{t} - t$ (do t = 0 không là nghiệm của (2))

Xét $y = -\frac{1}{t} - t$ với $|t| \geq 2$

Thì $y' = \frac{1}{t^2} - 1 = \frac{1 - t^2}{t^2}$

Ta có : $y' = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$



Do đó (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (d) cắt (C) trên $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq -\frac{5}{2} \vee m \geq \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow |m| \geq \frac{5}{2}$

Cách 2 : Yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow f(t) = t^2 + mt + 1 = 0$ có nghiệm t thỏa $|t| \geq 2$

Nhận xét rằng do P = 1 nên nếu f(t) có hai nghiệm t_1, t_2 (với $t_1 \leq t_2$) và có nghiệm thì ta có $\begin{cases} |t_1| \leq 1 \\ |t_2| \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} |t_1| \geq 1 \\ |t_2| \leq 1 \end{cases}$

Do đó :

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow t_1 \leq -2 < t_1 < 2 \vee -2 < t_1 < 2 \leq t_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1f(-2) \leq 0 \\ 1f(2) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1f(2) \leq 0 \\ 1f(-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 5 \leq 0 \\ 2m + 5 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -2m + 5 > 0 \\ 2m + 5 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \geq \frac{5}{2} \vee m \leq -\frac{5}{2}$

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình :

a/ $1+\cos^3 x-\sin^3 x=\sin x$

b/ $\cos^3 x+\cos^2 x+2\sin x-2=0$

c/ $\cos 2x+5=2(2-\cos x)(\sin x-\cos x)$

d/ $\cot gx-tgx=\sin x+\cos x$

e/ $\sin^3 x-\cos^3 x=\sin x-\cos x$

f/ $1+tgx=\sin x+\cos x$

g/ $\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$

k/ $\sin 2x-12(\sin x-\cos x)+12=0$

l/ $\frac{\sin x+\cos x}{\sin 2x+1}=1$

m/ $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\frac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}$

n/ $5(\sin x+\cos x)+\sin 3x-\cos 3x=2\sqrt{2}(2+\sin 2x)$

o/ $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+2\cos 2x=0$

p/ $\sin^2 x\cos x-\cos 2x+\sin x=\cos^2 x\sin x+\cos x$

r/ $\cos 2x+5=2(2-\cos x)(\sin x-\cos x)$

s/ $\cos^2 x+\sin^3 x+\cos x=0$

t/ $4\sin^3 x-1=3\sin x-\sqrt{3}\cos 3x$

2. Cho phương trình $\sin 2x(\sin x+\cos x)=m(1)$

a/ Chứng minh nếu $|m|>\sqrt{2}$ thì (1) vô nghiệm

b/ Giải phương trình khi $|m|=\sqrt{2}$

3. Cho phương trình $\sin 2x+4(\cos x-\sin x)=m$

a/ Giải phương trình khi m = 4

b/ Tìm m để phương trình có nghiệm

4. Cho phương trình : $\sin x\cos x-m(\sin x+\cos x)+1=0$

a/ Giải phương trình khi $m=\sqrt{2}$

b/ Tìm m để phương trình có nghiệm $\left(ĐS: |m|\geq 1\right)$

5. Cho phương trình $\frac{3}{\sin^2 x}+3tg^2x=m(tgx+\cot gx)=1$

Tìm m để phương trình có nghiệm $\left(ĐS: |m|\geq 4\right)$

CHƯƠNG VI.

PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP

$a\sin^2 u + b\sin u\cos u + c\cos^2 u = d$

Cách giải :

• Tìm nghiệm $u = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (lúc đó $\cos u = 0$ và $\sin u = \pm 1$)

• Chia hai vế phương trình cho $\cos^2 u \neq 0$ ta được phương trình :

$atg^2u + btgu + c = d\left(1 + tg^2u\right)$

Đặt $t = tgu$ ta có phương trình :

$(a - d)t^2 + bt + c - d = 0$

Giải phương trình tìm được $t = tgu$

Bài 127 : Giải phương trình

$$\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x\,(*)$$

Vì cosx = 0 không là nghiệm nên

Chia hai vế của (*) cho $\cos^2 \neq 0$ ta được

$(*) \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{3}tgx = \left(1 + tg^2x\right) + tg^2x$

Đặt $t = tgx$ ta có phương trình :

$2t^2 + 2\sqrt{3}t = 0$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = -\sqrt{3}$

Vậy $(*) \Leftrightarrow tgx = 0$ hay $tgx = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = k\pi$ hay $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 128 : Giải phương trình

$$\cos^3 x - 4\sin^3 x - 3\cos x\sin^2 x + \sin x = 0\,(*)$$

• Khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ thì $\cos x = 0$ và $\sin x = \pm 1$

thì (*) vô nghiệm

• Do $\cos x = 0$ không là nghiệm nên chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$

ta có $(*) \Leftrightarrow 1 - 4tg^3x - 3tg^2x + tgx\left(1 + tg^2x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3tg^3x + 3tg^2x - tgx - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (tgx + 1)\left(3tg^2x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow tgx = -1 \vee tgx = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 129 : Giải phương trình

$$3\cos^4 x - 4\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x = 0\,(*)$$

Do cosx = 0 không là nghiệm nên chia hai vế của (*) cho $\cos^4 x \neq 0$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow 3 - 4tg^2x + tg^4x = 0$

$\Leftrightarrow tg^2x = 1 \vee tg^2x = 3$

$\Leftrightarrow tgx = \pm 1 = tg\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) \vee tgx = tg\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 130 : Giải phương trình $\sin 2x + 2tgx = 3(*)$

Chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được

$(*) \Leftrightarrow \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{2tgx}{\cos^2 x} = \frac{3}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow 2tgx + 2tgx(1 + tg^2x) = 3(1 + tg^2x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \\ 2t^3 - 3t^2 + 4t - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \\ (t-1)(2t^2 - t + 3) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow tgx = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 131 : Giải phương trình

$$\sin x\sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x(*)$$

$(*) \Leftrightarrow 2\sin^2 x\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x = 6\cos^3 x$

• Khi $\cos x = 0$ ($\sin x = \pm 1$) thì $(*)$ vô nghiệm

• Chia hai vế phương trình (*) cho $\cos^3 x \neq 0$ ta được

$(*) \Leftrightarrow \frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{3\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 x} - 4\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = 6$

$\Leftrightarrow 2tg^2x + 3tgx(1 + tg^2x) - 4tg^3x = 6$

$\Leftrightarrow tg^3x - 2tg^2x - 3tgx + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (tgx - 2)(tg^2x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow tgx = 2 = tg\alpha \vee tgx = \pm\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (với $tg\alpha = 2$)

Bài 132 : (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A, năm 2003)
Giải phương trình
$$\cot gx - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + tgx} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x \, (*)$$

Điều kiện $\sin 2x \neq 0$ và $tgx \neq -1$

Ta có : $\dfrac{\cos 2x}{1 + tgx} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 + \dfrac{\sin x}{\cos x}} = \dfrac{\cos x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)}{\cos x + \sin x}$

$= \cos x\left(\cos x - \sin x\right)$ $\left(\text{do } tgx = -1 \text{ nên, } \sin x + \cos x \neq 0\right)$

Do đó : $(*) \Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x} - 1 = \left(\cos^2 x - \sin x \cos x\right) + \sin^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x} = 1 - \sin 2x$

$\Leftrightarrow \left(\cos x - \sin x\right) = \sin x\left(\cos x - \sin x\right)^2$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0$ hay $1 = \sin x\left(\cos x - \sin x\right)$ (**)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = 1\left(\text{nhận so với } tgx \neq -1\right) \\ \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} - tg^2 x \quad \left(\text{do } \cos x \neq 0\right) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2tg^2 x - tgx + 1 = 0\left(\text{vô nghiệm}\right) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ $\left(\text{nhận do } \sin 2x \neq 0\right)$

<u>Lưu ý</u> : có thể làm cách khác

$(**) \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3 = \sin 2x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow 3 = \sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$: vô nghiệm

Bài 133 : Giải phương trình $\sin 3x + \cos 3x + 2\cos x = 0 \, (*)$

$(*) \Leftrightarrow \left(3\sin x - 4\sin^3 x\right) + \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) + 2\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x + 4\cos^3 x - \cos x = 0$

Vì cosx = 0 không là nghiệm nên chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x \neq 0$ ta được

$(*) \Leftrightarrow 3tgx\left(1 + tg^2 x\right) - 4tg^3 x + 4 - \left(1 + tg^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow -tg^3x - tg^2x + 3tgx + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \\ t^3 + t^2 - 3t - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \\ (t+1)(t^2 - 3) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow tgx = -1 \vee tgx = \pm\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 134 : Giải phương trình $6\sin x - 2\cos^3 x = \dfrac{5\sin 4x.\cos x}{2\cos 2x}(*)$

Điều kiện : $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x \neq 0 \Leftrightarrow tgx \neq \pm 1$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sin x - 2\cos^3 x = \dfrac{10\sin 2x \cos 2x \cos x}{2\cos 2x} \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x \cos x \\ tgx \neq \pm 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sin x - 2\cos^3 x = 10\sin x\cos^2 x\,(**) \\ tgx \neq \pm 1 \end{cases}$

Do cosx = 0 không là nghiệm của (**), chia hai vế phương trình (**) cho $\cos^3 x$ ta được

$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6tgx}{\cos^2 x} - 2 = 10tgx \\ tgx \neq \pm 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \text{ với } t \neq \pm 1 \\ 6t(1 + t^2) - 2 = 10t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \text{ với } t \neq \pm 1 \\ 3t^3 - 2t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \text{ với } t \neq \pm 1 \\ (t-1)(3t^2 + 3t + 1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \text{ với } t \neq \pm 1 \\ t = 1 \end{cases}$: vô nghiệm

Bài 135 : Giải phương trình $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0(*)$

- Vì cosx = 0 không là nghiệm nên chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ thì $(*) \Leftrightarrow tgx(1 + tg^2x) - 4tg^3x + 1 + tg^2x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \\ -3t^3 + t^2 + t + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \\ (t-1)(3t^2 + 2t + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow tgx = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 136 : Giải phương trình $tgx\sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x\cos x)(*)$

Chia hai vế của phương trình (*) cho $\cos^2 x$

$$(*) \Leftrightarrow tg^3x - 2tg^2x = \frac{3(\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow tg^3x - 2tg^2x = 3(1 - tg^2x + tgx)$$

$$\Leftrightarrow tg^3x + tg^2x - 3tgx - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \\ t^3 + t^2 - 3t - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \\ (t+1)(t^2 - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow tgx = -1 \vee tgx = \pm\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 137 : Cho phương trình

$$(4 - 6m)\sin^3 x + 3(2m - 1)\sin x + 2(m - 2)\sin^2 x\cos x - (4m - 3)\cos x = 0(*)$$

a/ Giải phương trình khi m = 2

b/ Tìm m để phương trình (*) có duy nhất một nghiệm trên $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ thì cosx = 0 và $\sin x = \pm 1$ nên

(*) thành : $\pm(4 - 6m) \pm 3(2m - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 1 = 0$ vô nghiệm

chia hai về (*) cho $\cos^3 x \neq 0$ thì

$$(*) \Leftrightarrow (4 - 6m)tg^3x + 3(2m - 1)tgx(1 + tg^2x) + 2(m - 2)tg^2x - (4m - 3)(1 + tg^2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \\ t^3 - (2m + 1)t^2 + 3(2m - 1)t - 4m + 3 = 0(**) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \operatorname{tg}x \\ (t-1)(t^2 - 2mt + 4m - 3) = 0 \end{cases}$$

a/ Khi m = 2 thì (*) thành $\begin{cases} t = \operatorname{tg}x \\ (t-1)(t^2 - 4t + 5) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b/ Ta có : $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ thì $\operatorname{tg}x = t \in [0,1]$

Xét phương trình : $t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0 \, (2)$

$\Leftrightarrow t^2 - 3 = 2m(t-2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{t^2 - 3}{t - 2} = 2m$ (do t = 2 không là nghiệm)

Đặt $y = f(t) = \dfrac{t^2 - 3}{t - 2} \, (C)$ và (d) $y = 2m$

Ta có : $y' = f(t) = \dfrac{t^2 - 4t + 3}{(t-2)^2}$

t		0		1		2		3	
y'	+		+	0	−	‖	−	0	+
y			$\frac{3}{2}$ ↗	2		‖			

Do (**) luôn có nghiệm $t = 1 \in [0,1]$ trên yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (d)\; y = 2m \text{ không có điểm chung với } (C) \\ (d) \text{ cắt } (C) \text{ tại 1 điểm duy nhất } t = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2m < \frac{3}{2} \vee 2m \geq 2$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{3}{4} \vee m \geq 1$$

Cách khác :

Y C B T $\Leftrightarrow f(t) = t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0 \, (2)$ vô nghiệm trên $[0,1)$.

Ta có (2) có nghiệm $\in [0,1] \Leftrightarrow f(0).f(1) \leq 0$ *hay* $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(0) \geq 0 \\ af(1) \geq 0 \\ 0 \leq \frac{S}{2} \leq 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (4m-3)(2m-2)\le 0 \; hay \begin{cases} m^2-4m+3\ge 0 \\ 4m-3>0 \\ 2m-2>0 \\ 0\le m\le 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \frac{3}{4}\le m\le 1$$

Do đó (2) vô nghiệm trên $[0,1) \Leftrightarrow m<\frac{3}{4} \; hay \; m>1 \; hay \; f(1)=0$

$$\Leftrightarrow m<\frac{3}{4}\vee m\ge 1$$

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau :

a/ $\cos^3 x + \sin x - 3\sin^2 x\cos x = 0$

b/ $\sin^2 x\left(tgx + 1\right) = 3\sin x\left(\cos x - \sin x\right) + 3$

c/ $2\cos^2 x + \cos 2x + \sin x = 0$

d/ $tg^2x = \dfrac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}$

e/ $\sin^3 x - 5\sin^2 x\cos x - 3\sin x\cos^2 x + 3\cos^3 x = 0$

f/ $\cos^3 x + \sin x - 3\sin^2 x\cos x = 0$

g/ $1 + tgx = 2\sqrt{2}\sin x$

h/ $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$

k/ $3tg^2x + 4tgx + 4\cot gx + 3\cot g^2x + 2 = 0$

m/ $3tg^2 x - tgx + \dfrac{3(1 + \sin x)}{\cos^2 x} - 8\cos^2(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}) = 0$

n/ $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin 2x} = 1$

2. Cho phương trình : $\sin^2 x + 2\left(m - 1\right)\sin x\cos x - \left(m + 1\right)\cos^2 x = m$

a/ Tìm m để phương trình có nghiệm

b/ Giải phương trình khi m = -2 $\left(ĐS : m \in \left[-2, 1\right]\right)$

CHƯƠNG VII
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA CĂN VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A) PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA CĂN

Cách giải : Áp dụng các công thức

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$$

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

Ghi chú : Do theo phương trình chỉnh lý đã bỏ phần bất phương trình lượng giác nên ta xử lý điều kiện $B \geq 0$ bằng phương pháp thử lại và chúng tôi bỏ các bài toán quá phức tạp.

Bài 138 : Giải phương trình $\sqrt{5\cos x - \cos 2x} + 2\sin x = 0 \; (*)$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{5\cos x - \cos 2x} = -2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0 \\ 5\cos x - \cos 2x = 4\sin^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0 \\ 5\cos x - \left(2\cos^2 x - 1\right) = 4\left(1 - \cos^2 x\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0 \\ 2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \vee \cos x = -3 \; (\text{loại}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0 \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 139 : Giải phương trình

$$\sin^3 x + \cos^3 x + \sin^3 x \cot gx + \cos^3 x tgx = \sqrt{2\sin 2x}$$

Điều kiện :

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\\ \sin 2x \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x \neq 0\\ \sin 2x \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x > 0$$

Lúc đó :

$$(*) \Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x + \sin^2 x\cos x + \cos^2 x\sin x = \sqrt{2\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x(\sin x + \cos x) + \cos^2 x(\cos x + \sin x) = \sqrt{2\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sqrt{2\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x + \cos x \geq 0\\ (\sin x + \cos x)^2 = 2\sin 2x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0\\ 1 + \sin 2x = 2\sin 2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0\\ \sin 2x = 1\,(\text{nhận do } \sin 2x > 0)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0\\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0\\ x = \frac{\pi}{4} + m2\pi \vee x = \frac{5\pi}{4} + m2\pi\,(\text{loại}), m \in \mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + m2\pi, m \in \mathbb{Z}$$

Bài 140 : Giải phương trình $\sqrt{1 + 8\sin 2x.\cos^2 2x} = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)(*)$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0\\ 1 + 8\sin 2x\cos^2 2x = 4\sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0\\ 1 + 4\sin 2x(1 + \cos 4x) = 2\left[1 - \cos(6x + \frac{\pi}{2})\right]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0\\ 1 + 4\sin 2x + 2(\sin 6x - \sin 2x) = 2(1 + \sin 6x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0\\ \sin 2x = \frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0\\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{cases}$$

So lại với điều kiện $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

•Khi $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ thì

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3k\pi\right) = \cos k\pi$$

$$= \left[\begin{array}{l} 1\ ,(\text{nếu k chẵn})(\text{nhận}) \\ -1,(\text{nếu k lẻ})(\text{loại}) \end{array}\right.$$

• Khi $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ thì

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3k\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$= \left[\begin{array}{l} -1,\text{nếu k chẵn (loại)} \\ 1,\text{ nếu k lẻ (nhận)} \end{array}\right.$$

Do đó $(*) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + m2\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + (2m+1)\pi, m \in \mathbb{Z}$

<u>Bài 141</u> : Giải phương trình $\frac{\sqrt{1 - \sin 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x}}{\sin x} = 4\cos x\,(*)$

Lúc đó : $(*) \Leftrightarrow \sqrt{1 - \sin 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = 2\sin 2x$

(hiển nhiên sinx = 0 không là nghiệm , vì sinx =0 thì VT = 2, VP = 0)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2\sqrt{1 - \sin^2 2x} = 4\sin^2 2x \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1 - \sin^2 2x} = 2\sin^2 2x - 1 \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sin^2 2x = 4\sin^4 2x - 4\sin^2 2x + 1 \\ \sin^2 2x \geq \frac{1}{2} \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 2x\left(4\sin^2 2x - 3\right) = 0 \\ \sin 2x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin 2x = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin 2x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee 2x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Chú ý : Có thể đưa về phương trình chứa giá trị tuyệt đối

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ |\cos x - \sin x| + |\cos x + \sin x| = 2\sin 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow |\cos x - \sin x| + |\cos x + \sin x| = 2\sin 2x$

Bài 142 : Giải phương trình $\sin x + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{\sin x + \sqrt{3}\cos x} = 2$ (*)

Đặt $t = \sin x + \sqrt{3}\cos x = \sin x + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos x$

$\Leftrightarrow t = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$(*)$ thành $t + \sqrt{t} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{t} = 2 - t$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - t \geq 0 \\ t = 4 - 4t + t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 2 \\ t^2 - 5t + 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 2 \\ t = 1 \vee t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$

Do đó $(*)$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ hay $x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 143 : Giải phương trình

$$3\sqrt{tgx + 1}\left(\sin x + 2\cos x\right) = 5\left(\sin x + 3\cos x\right)(*)$$

Chia hai vế của (*) cho $\cos x \neq 0$ ta được

$(*) \Leftrightarrow 3\sqrt{tgx + 1}\left(tgx + 2\right) = 5\left(tgx + 3\right)$

Đặt $u = \sqrt{tgx + 1}$ với $u \geq 0$

Thì $u^2 - 1 = tgx$

(*) thành $3u\left(u^2 + 1\right) = 5\left(u^2 + 2\right)$

$\Leftrightarrow 3u^3 - 5u^2 + 3u - 10 = 0$

$\Leftrightarrow (u - 2)\left(3u^2 + u + 5\right) = 0$

$\Leftrightarrow u = 2 \vee 3u^2 + u + 5 = 0$ (vô nghiệm)

Do đó $(*) \Leftrightarrow \sqrt{tgx + 1} = 2$

$\Leftrightarrow \text{tgx} + 1 = 4$

$\Leftrightarrow \text{tgx} = 3 = \text{tg}\alpha\left(\text{với } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 144 : Giải phương trình $\left(\sqrt{1-\cos x} + \sqrt{\cos x}\right)\cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x\,(*)$

$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{1-\cos x} + \sqrt{\cos x}\right)\cos 2x = \sin 2x \cos 2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \ge 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases}$ hay $\sqrt{1-\cos x} + \sqrt{\cos x} = \sin 2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \ge 0 \\ 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ hay $\begin{cases} \cos x \ge 0 \\ \sin 2x \ge 0 \\ 1 + 2\sqrt{(1-\cos x)\cos x} = \sin^2 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \ge 0 \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ hay $\begin{cases} \cos x \ge 0 \\ \sin 2x \ge 0 \\ 1 + 2\sqrt{(1-\cos x)\cos x} = \sin^2 2x \end{cases}$ (VT $\ge 1 \ge$ VP)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \ge 0 \\ x = \pm\frac{\pi}{4} + h\pi \text{ hay } x = \pm\frac{5\pi}{4} + h\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$ hay $\begin{cases} \cos x \ge 0 \\ \sin 2x \ge 0 \\ \sin^2 2x = 1 \\ (1-\cos x)\cos x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + h\pi, h \in \mathbb{Z}$

hay $\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \cos x = 0\,(\Rightarrow \sin 2x = 0) \end{cases}$ hay $\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \cos x = 1\,(\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0) \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + h\pi, h \in \mathbb{Z}$

Bài 145 : Giải phương trình $\sin^3 x(1 + \cot gx) + \cos^3 x(1 + \text{tgx}) = 2\sqrt{\sin x \cos x}\,(*)$

$(*) \Leftrightarrow \sin^3 x\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}\right) + \cos^3 x\left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}\right) = 2\sqrt{\sin x \cos x}$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2\sqrt{\sin x \cos x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x \ge 0 \\ 1 + \sin 2x = 2\sin 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x \ge 0 \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \ge 0 \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + h2\pi \text{ hay } x+\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + h2\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + h2\pi, h \in \mathbb{Z}$$

Bài 146 : Giải phương trình $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1+\sin 2x} = 2\sqrt{\sin x + \cos x}\ (*)$

Điều kiện $\cos 2x \geq 0$ và $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

Lúc đó : $(*) \Leftrightarrow \sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x} + \sqrt{(\cos x + \sin x)^2} = 2\sqrt{\cos x + \sin x}$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + (\cos x + \sin x)^2 + 2\sqrt{\cos 2x}\sqrt{(\cos x + \sin x)^2} = 4(\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos x + \sin x) + (\sin x + \cos x)\sqrt{\cos 2x} = 2(\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \cos x + \sqrt{\cos 2x} = 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = -1 \\ \sqrt{\cos 2x} = 2 - \cos x\ (**) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = -1 \\ \cos 2x = 4 - 4\cos x + \cos^2 x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow tgx = -1 \vee \cos^2 x + 4\cos x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow tgx = -1 \vee \cos x = 1 \vee \cos x = -5 \text{ (loại)}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Thử lại : • $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ thì $\cos 2x = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (nhận)

Và $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin k\pi = 0$ (nhận)

• $x = k2\pi$ thì $\cos 2x = 1$ (nhận)

và $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} > 0$ (nhận)

Do đó $(*) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Chú ý : Tại (**) có thể dùng phương trình lượng giác không mực

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sqrt{\cos 2x} = 2 \\ \sin x + \cos x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 \\ \sin x + \cos x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x + \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Cách khác

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x} + \sqrt{(\cos x + \sin x)^2} = 2\sqrt{\cos x + \sin x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\cos x + \sin x).(\cos x - \sin x)} + \sqrt{(\cos x + \sin x)^2} = 2\sqrt{\cos x + \sin x}$$

$$\Leftrightarrow \cos x + \sin x = 0 \text{ hay } \begin{cases} \cos x + \sin x > 0 \\ \sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{(\cos x + \sin x)} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}x = -1 \text{ hay } \begin{cases} \cos x + \sin x > 0 \\ 2\cos x + 2\sqrt{\cos 2x} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}x = -1 \text{ hay } \begin{cases} \cos x + \sin x > 0 \\ \cos x + \sqrt{\cos 2x} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ hay } \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ hay } x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

(**nhận xét**: khi cosx =1 thì sinx = 0 và sinx + cosx = 1 > 0)

BÀI TẬP

1. Giải phương trình :

a/ $\sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0$

b/ $\dfrac{\cos\frac{4x}{3} - \cos^2 x}{\sqrt{1 - \text{tg}^2 x}} = 0$

c/ $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x}$

d/ $\sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + 2} = 2\sin x - 1$

e/ $2\sqrt{3\sin x} = \dfrac{3\text{tg}x}{2\sqrt{\sin x} - 1} - \sqrt{3}$

f/ $\dfrac{\sin^2 2x + \cos^4 2x - 1}{\sqrt{\sin\cos x}} = 0$

g/ $8\cos 4x\cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0$

h/ $\sqrt{\sin x} + \sin x + \sin^2 x + \cos x = 1$

k/ $\sqrt{5-3\sin^2 x-4\cos x}=1-2\cos x$

l/ $\cos 2x=\cos^2 x\sqrt{1+tgx}$

2. Cho phương trình :

$\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}=m\cos x(1)$

a/ Giải phương trình khi m = 2

b/ Giải và biện luận theo m phương trình (1)

3. Cho f(x) = $3\cos^6 2x+\sin^4 2x+\cos 4x-m$

a/ Giải phương trình f(x) = 0 khi m = 0

b/ Cho $g(x)=2\cos^2 2x\sqrt{3\cos^2 2x+1}$. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình f(x) = g(x) có nghiệm.

$(\text{ĐS}: 1\le m\le 0)$

4. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{1+2\sin x}=m$

$$\left(\text{ĐS}: \sqrt{1+\sqrt{3}}\le m\le 2\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$$

B) PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA CÁC TRỊ TUYỆT ĐỐI

Cách giải : 1/ Mở giá trị tuyệt đối bằng định nghĩa

2/ Áp dụng

$\bullet |A|=|B|\Leftrightarrow A=\pm B$

$\bullet |A|=B\Leftrightarrow \begin{cases}B\ge 0\\ A=\pm B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B\ge 0\\ A^2=B^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A\ge 0\\ A=B\end{cases}\vee\begin{cases}A<0\\ A=-B\end{cases}$

Bài 147 : Giải phương trình $|\cos 3x|=1-\sqrt{3}\sin 3x\ (*)$

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}1-\sqrt{3}\sin 3x\ge 0\\ \cos^2 3x=1-2\sqrt{3}\sin 3x+3\sin^2 3x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 3x\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ 1-\sin^2 3x=1-2\sqrt{3}\sin 3x+3\sin^2 3x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 3x\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ 4\sin^2 3x-2\sqrt{3}\sin 3x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 3x\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \sin 3x=0\vee\sin 3x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\sin 3x=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$$

Bài 148 : Giải phương trình $3\sin x + 2|\cos x| - 2 = 0\,(*)$

$$(*) \Leftrightarrow 2|\cos x| = 2 - 3\sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3\sin x \ge 0 \\ 4\cos^2 x = 4 - 12\sin x + 9\sin^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le \dfrac{2}{3} \\ 4\left(1 - \sin^2 x\right) = 4 - 12\sin x + 9\sin^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le \dfrac{2}{3} \\ 13\sin^2 x - 12\sin x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le \dfrac{2}{3} \\ \sin x = 0 \vee \sin x = \dfrac{12}{13} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 149 : Giải phương trình $\sin x\cos x + |\sin x + \cos x| = 1\,(*)$

Đặt $t = |\sin x + \cos x| = \sqrt{2}\left|\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

Với điều kiện : $0 \le t \le \sqrt{2}$

Thì $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

Do đó (*) thành : $\dfrac{t^2 - 1}{2} + t = 1$

$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = -3$ (loại)

Vậy $(*) \Leftrightarrow 1^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 150 : Giải phương trình $|\sin x - \cos x| + 2\sin 2x = 1\,(*)$

Đặt $t = |\sin x - \cos x|$ (điều kiện $0 \le t \le \sqrt{2}$)

Thì $t^2 = 1 - \sin 2x$

(*) thành: $t + 2\left(1 - t^2\right) = 1$

$\Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = -\dfrac{1}{2}$ (loại do điều kiện)

khi $t = 1$ thì $1^2 = 1 - \sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 151 : Giải phương trình $\sin^4 x - \cos^4 x = |\sin x| + |\cos x| (*)$

$(*) \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = |\sin x| + |\cos x|$

$\Leftrightarrow -\cos 2x = |\sin x| + |\cos x|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\cos 2x \ge 0 \\ \cos^2 2x = 1 + 2|\sin x||\cos x| \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \le 0 \\ 1 - \sin^2 2x = 1 + |\sin 2x| \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \le 0 \\ |\sin 2x| = -\sin^2 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \le 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \le 0 \\ \cos^2 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = -1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 152 : Giải phương trình $\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2\cos 2x} (*)$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2(2\cos^2 x - 1)}$

$\Leftrightarrow \cos x\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x\right) = |\cos x|$

$\Leftrightarrow \cos x.\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = |\cos x|$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \begin{cases} \cos x > 0 \\ x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x < 0 \\ x - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \begin{cases} \cos x > 0 \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x < 0 \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 153 : Tìm các nghiệm trên $(0, 2\pi)$ của phương trình :

$$\frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \sin 2x + \cos 2x \, (*)$$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow \dfrac{2\cos 2x \sin x}{\sqrt{2}\,|\sin x|} = \sqrt{2}\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Điều kiện : $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$

• Khi $x \in (0, \pi)$ thì $\sin x > 0$ nên :

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos 2x = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Do $x \in (0, \pi)$ nên $x = \dfrac{\pi}{16}$ hay $x = \dfrac{9\pi}{16}$

Khi $x \in (\pi, 2\pi)$ thì $\sin x < 0$ nên :

$$(*) \Leftrightarrow -\cos 2x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi - 2x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \pm(\pi - 2x) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Do $x \in (\pi, 2\pi)$ nên $x = \dfrac{21\pi}{16} \vee x = \dfrac{29\pi}{16}$ •

Bài 154 Cho phương trình : $\sin^6 x + \cos^6 x = a|\sin 2x| \, (*)$

Tìm a sao cho phương trình có nghiệm.

Ta có :

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

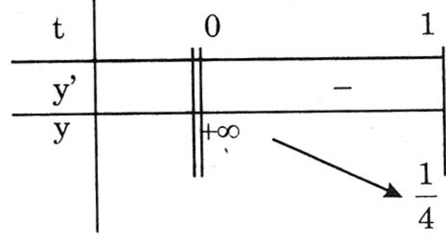
Đặt $t = |\sin 2x|$ điều kiện $0 \le t \le 1$

thì (*) thành : $1-\frac{3}{4}t^2=at$ $(**)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{t}-\frac{3}{4}t=a$ (do t = 0 thì (**) vô nghiệm)

Xét $y=\frac{1}{t}-\frac{3}{4}t$ trên $D=(0,1]$

thì $y'=-\frac{1}{t^2}-\frac{3}{4}<0$



Do đó : (*) có nghiệm $\Leftrightarrow a\ge\frac{1}{4}$ •

Bài 155 Cho phương trình $\cos 2x=m\cos^2 x\sqrt{1+\text{tg}x}$ $(*)$

Tìm m để phương trình có nghiệm trên $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$

Đặt $t=\text{tg}x$ thì

Vậy : (*) thành: $1-t^2=m\sqrt{1+t}$ $(**)$ (chia 2 vế cho $\cos^2\neq 0$)

Khi $0\le x\le\frac{\pi}{3}$ thì $t\in\left[0,\sqrt{3}\right]$

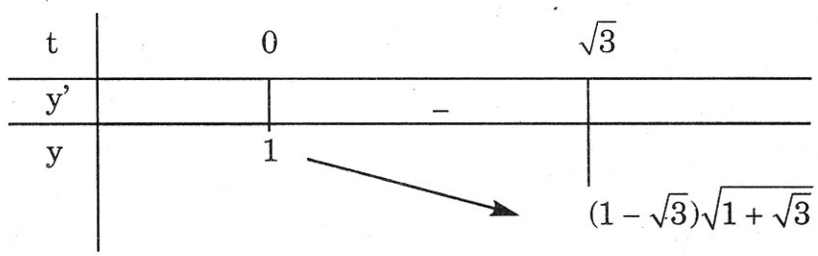
Vậy (**) $\Leftrightarrow m=\frac{1-t^2}{\sqrt{1+t}}=\frac{(1-t)(1+t)}{\sqrt{1+t}}=(1-t)\sqrt{1+t}$

Xét $y=(1-t)\sqrt{1+t}$ trên $\left[0,\sqrt{3}\right]$

Ta có

$y'=-\sqrt{1+t}+\frac{(1-t)}{2\sqrt{1+t}}=\frac{-2(1+t)+(1-t)}{2\sqrt{1+t}}$

$\Leftrightarrow y'=\frac{-3t-1}{2\sqrt{1+t}}<0$ $\forall t\in\left[0,\sqrt{3}\right]$



Do đó : (*) có nghiệm trên $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow \left(1-\sqrt{3}\right)\sqrt{1+\sqrt{3}} \le m \le 1$ •

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình

a/ $|\sin x - \cos x| = 1 - 4\sin 2x$

b/ $4\sin x + 3|\cos x| = 3$

c/ $|tgx| = \cot gx + \frac{1}{\cos x}$

d/ $\frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}} - \sqrt{2} = -\sqrt{2}\left(\frac{1+3\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$

e/ $|\cot gx| = tgx + \frac{1}{\sin x}$

f/ $2\cos x - |\sin x| = 1$

g/ $\frac{\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x}}{\cos x} = 4\sin x$

h/ $\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} = \sqrt{2}\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$

m/ $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1+\sin 2x} = \sqrt{\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2}}$

n/ $|\cos x| + \sin 3x = 0$

r/ $|\cot gx| = tgx + \frac{1}{\sin x}$

s/ $|\cos x + 2\sin 2x - \cos 3x| = 1 + 2\sin x - \cos 2x$

o/ $\frac{tg^2 x}{|tgx - 1|} = |tgx + 1| + \frac{1}{|tgx - 1|}$

p/ $|\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x| = 2$

2. $|\sin x + \cos x| + a\sin 2x = 1$

Tìm tham số a dương sao cho phương trình có nghiệm

3. Cho phương trình: $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = m$

a/ Giải phương trình khi m = 0

b/ Tìm m để phương trình có nghiệm (ĐS $\sqrt{2} - 4 \le m \le \frac{65}{16}$)

CHƯƠNG VIII

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MỰC

Trường hợp 1: TỔNG HAI SỐ KHÔNG ÂM

Áp dụng: Nếu $\begin{cases} A \ge 0 \wedge B \ge 0 \\ A + B = 0 \end{cases}$ thì $A = B = 0$

Bài 156 Giải phương trình:

$$4\cos^2 x + 3tg^2x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}tgx + 4 = 0 \ (*)$$

Ta có:

$(*) \Leftrightarrow \left(2\cos x - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}tgx + 1\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ tgx = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ tgx = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Bài 157 Giải phương trình:

$$8\cos 4x.\cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0 \ (*)$$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow 4\cos 4x\left(1 + \cos 4x\right) + 1 + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$

$\Leftrightarrow \left(4\cos^2 4x + 4\cos 4x + 1\right) + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\cos 4x + 1\right)^2 + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\dfrac{1}{2} \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\dfrac{1}{2} \\ 3x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{k2\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z} \text{ (có 3 đầu ngọn cung)} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + m2\pi \text{ hay } x = m2\pi \text{ hay } x = \dfrac{2\pi}{3} + m2\pi \text{ , } m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + m2\pi,\ m \in \mathbb{Z}$$

(ta nhận $k = \pm 1$ và loại $k = 0$)

Bài 158 Giải phương trình:

$$\sin^2 x + \frac{\sin^2 3x}{3\sin 4x}\left(\cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x\right) = \sin x \sin^2 3x \ (*)$$

Ta có: $\cos 3x.\sin^3 3x + \sin 3x.\cos^3 x$

$= \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right)\sin^3 x + \left(3\sin x - 4\sin^3 x\right)\cos^3 x$

$= -3\cos x \sin^3 x + 3\sin x \cos^3 x = 3\sin x \cos x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$

$= \dfrac{3}{2}\sin 2x.\cos 2x = \dfrac{3}{4}\sin 4x$

Vậy: $(*) \Leftrightarrow \sin^2 x + \dfrac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x$ và $\sin 4x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\sin^2 3x - \sin x\right)^2 - \frac{1}{4}\sin^4 3x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = 0 \text{ và } \sin 4x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\sin^2 3x - \sin x\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2 3x\left(1 - \sin^2 3x\right) = 0 \text{ và } \sin 4x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\sin^2 3x - \sin x\right)^2 + \frac{1}{16}\sin^2 6x = 0 \text{ và } \sin 4x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}\sin^2 3x = \sin x \\ \sin 3x = 0 \vee \cos 3x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \sin 3x = 0 \\ \sin x = 0\ (\text{VN}) \end{cases} \vee \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} = \sin x \\ \sin 3x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \\ 3\sin x - 4\sin^3 x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \vee \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

<u>Trường hợp 2</u> Phương pháp đối lập

Nếu $\begin{cases} A \le M \le B \\ A = B \end{cases}$ thì $A = B = M$

<u>Bài 159</u> Giải phương trình: $\sin^4 x - \cos^4 x = |\sin x| + |\cos x|$ (*)

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = |\sin x| + |\cos x|$

$$\Leftrightarrow -\cos 2x = |\sin x| + |\cos x|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \le 0 \\ \cos^2 2x = 1 + 2|\sin x||\cos x| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \le 0 \\ -\sin^2 2x = 2|\sin 2x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \le 0 \\ \sin 2x = 0 \ (\cos 2x = \pm 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

<u>Cách khác</u>

Ta có $\sin^4 x - \cos^4 x \le \sin^4 x \le |\sin x| \le |\sin x| + |\cos x|$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^4 x = |\sin x| \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

<u>Bài 160:</u> Giải phương trình: $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2\sin 3x$ (*)

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 4\sin^2 3x.\sin^2 x = 6 + 2\sin 3x$

- Do: $\sin^2 3x \le 1$ và $\sin^2 x \le 1$
  nên $4\sin^2 3x \sin^2 x \le 4$
- Do $\sin 3x \ge -1$ nên $6 + 2\sin 3x \ge 4$
  Vậy $4\sin^2 3x \sin^2 x \le 4 \le 6 + 2\sin 3x$
  Dấu = của phương trình (*) đúng khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\sin^2 3x = 1\\ \sin^2 x = 1\\ \sin 3x = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 x = 1\\ \sin 3x = -1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = \pm\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\\ \sin 3x = -1\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 161 Giải phương trình: $\dfrac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} = 2\cos 2x \, (*)$

Điều kiện: $\sin x \ge 0 \wedge \cos x \ge 0$

Ta có: (*)

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x})$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x - \sin x = 0 & (1)\\ 1 + \sin x \cos x = 2(\cos x + \sin x)(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}) & (2)\end{array}\right.$$

Ta có: •(1) $\Leftrightarrow tgx = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

• Xét (2)

Ta có: khi $\sin x \ge 0$ thì $\sqrt{\sin x} \ge \sin x \ge \sin^2 x$

Tương tự $\sqrt{\cos x} \ge \cos x \ge \cos^2 x$

Vậy $\sin x + \cos x \ge 1$ và $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \ge 1$

Suy ra vế phải của (2) thì ≥ 2

Mà vế trái của (2): $1 + \dfrac{1}{2}\sin 2x \le \dfrac{3}{2}$

Do đó (2) vô nghiệm

Vậy: (*) $\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 162: Giải phương trình: $\sqrt{3 - \cos x} - \sqrt{\cos x + 1} = 2 \, (*)$

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \sqrt{3 - \cos x} = 2 + \sqrt{\cos x + 1}$

$\Leftrightarrow 3 - \cos x = 5 + \cos x + 4\sqrt{\cos x + 1}$

$\Leftrightarrow -2(\cos x + 1) = 4\sqrt{\cos x + 1}$

Ta có: $-2(\cos x + 1) \le 0 \; \forall x$

mà $4\sqrt{\cos x + 1} \ge 0 \; \forall x$

Do đó dấu = của (*) xảy ra $\Leftrightarrow \cos x = -1$

$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \quad, k \in \mathbb{Z}$

Bài 163: Giải phương trình:

$$\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2\left(1 + \sin^2 2x\right) (*)$$

Do bất đẳng thức Bunhiacốpski:

$$\left|AX + BY\right| \le \sqrt{A^2 + B^2}.\sqrt{X^2 + Y^2}$$

nên: $\left|1\cos 3x + 1\sqrt{2 - \cos^2 3x}\right| \le \sqrt{2}.\sqrt{\cos^2 3x + \left(2 - \cos^2 3x\right)} = 2$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \cos 3x = \sqrt{2 - \cos^2 3x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x \ge 0 \\ \cos^2 3x = 2 - \cos^2 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x \ge 0 \\ \cos 3x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 3x = 1$$

Mặt khác: $2\left(1 + \sin^2 2x\right) \ge 2$

dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \sin 2x = 0$

Vậy: $\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} \le 2 \le 2\left(1 + \sin^2 2x\right)$

dấu = của (*) chỉ xảy ra khi:

$\cos 3x = 1 \wedge \sin 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \ (\text{có 4 đầu ngọn cung}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

Bài 164: Giải phương trình: $tg^2x + cotg^2x = 2\sin^5\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (*)

Điều kiện: $\sin 2x \ne 0$

- Do bất đẳng thức Cauchy: $tg^2x + cotg^2x \ge 2$

  dấu = xảy ra khi $tgx = cotgx$

- Mặt khác: $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le 1$

nên $2\sin^5\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le 2$

dấu = xảy ra khi $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

Do đó: $tg^2x + cotg^2x \ge 2 \ge 2\sin^5\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Dấu = của (*) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} tgx = cotgx \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} tg^2x = 1 \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Trường hợp 3:

Áp dụng: Nếu $\begin{cases} A \le M \text{ và } B \le M \\ A + B = M + N \end{cases}$ thì $\begin{cases} A = M \\ B = N \end{cases}$

$$\sin u + \sin v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = 1 \end{cases}$$

$$\sin u - \sin v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = -1 \end{cases}$$

$$\sin u + \sin v = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = -1 \end{cases}$$

Tương tự cho các trường hợp sau

$\sin u \pm \cos v = \pm 2$; $\cos u \pm \cos v = \pm 2$

Bài 165: Giải phương trình: $\cos 2x + \cos\dfrac{3x}{4} - 2 = 0 \; (*)$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \cos 2x + \cos\dfrac{3x}{4} = 2$

Do $\cos 2x \le 1$ và $\cos\dfrac{3x}{4} \le 1$

nên dấu = của (*) chỉ xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos\dfrac{3x}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{8h\pi}{3}, h \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = 8m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

Do : $k\pi = \dfrac{8h\pi}{3} \Leftrightarrow k = \dfrac{8h}{3}$

để k nguyên ta chọn $h = 3m \; (m \in Z)$ (thì $k = 8m$)

Cách khác

$$\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos\dfrac{3x}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos\dfrac{3k\pi}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 8m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

Bài 166: Giải phương trình:

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x.\cos 2x.\cos 3x + 2 \; (*)$$

$$\begin{aligned}\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x &= 2\cos 3x\cos x + 2\cos^2 3x - 1\\ &= 2\cos 3x\left(\cos x + \cos 3x\right) - 1\\ &= 4\cos 3x.\cos 2x.\cos x - 1\end{aligned}$$

Vậy: $\cos 3x.\cos 2x.\cos x = \dfrac{1}{4}\left(\cos 2x + 6\cos 4x + \cos 6x + 1\right)$

Do đó:

$$(*) \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \frac{1}{4}\left(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x\right) + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\left(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x\right) = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x = 1\\ \cos 4x = 1\\ \cos 6x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} & (1)\\ \cos 4x = 1 & (2)\\ \cos 6x = 1 & (3)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

(Thế (1) vào (2) và (3) ta thấy hiển nhiên thỏa)

Bài 167: Giải phương trình:

$$\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x - \cos x + 4 = 0(*)$$

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow 2 = \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1\\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + h2\pi, h \in \mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\\ x = \frac{\pi}{3} + h2\pi, h \in \mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + h\pi, h \in \mathbb{Z}$$

<u>Cách khác</u>

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1\\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1\\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + h2\pi, h \in \mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \\ x = \frac{\pi}{3} + h2\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + h\pi, h \in \mathbb{Z}$$

Bài 168: Giải phương trình: $4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1 (*)$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow 4\cos x - 2\left(2\cos^2 x - 1\right) - \left(1 - 2\sin^2 2x\right) = 1$

$\Leftrightarrow 4\cos x - 4\cos^2 x + 8\sin^2 x\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $1 - \cos x + 2\sin^2 x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $1 + \cos x\left(2\sin^2 x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $1 - \cos x\cos 2x = 0 (**)$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $1 - \frac{1}{2}\left(\cos 3x + \cos x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos 3x + \cos x = 2$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ 4\cos^3 x - 3\cos x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Cách khác

$(**) \Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $\cos x\cos 2x = 1$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 2x = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \begin{cases} x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\text{ (loại)} \\ \cos 2x = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 169: Giải phương trình:

$$tg2x + tg3x + \frac{1}{\sin x\cos 2x\cos 3x} = 0 (*)$$

Điều kiện: $\sin 2x\cos 2x\cos 3x \neq 0$

Lúc đó:

$(*) \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} + \frac{1}{\sin x.\cos 2x.\cos 3x} = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x\sin x\cos 3x + \sin 3x\sin x.\cos 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(\sin 2x\cos 3x + \sin 3x\cos 2x\right) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x.\sin 5x = -1$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 4x) = -1$

$\Leftrightarrow \cos 6x - \cos 4x = 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 6x = 1 \\ \cos 4x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos 2x \\ 4t^3 - 3t = 1 \\ 2t^2 - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos 2x \\ 4t^3 - 3t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$

Do đó: (*) vô nghiệm.

Cách khác

$\Leftrightarrow \sin x.\sin 5x = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin 5x = -1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin 5x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \sin 5x = -1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \sin 5x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in \varnothing$

Bài 170: Giải phương trình: $\cos^2 3x.\cos 2x - \cos^2 x = 0(*)$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \cos 6x)\cos 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x) = 1$

$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x = 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 8x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2 4x - 1 = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 4x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \cos 4x = 1$

$\Leftrightarrow 4x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Cách khác

$\Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 6x = 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \cos 6x = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \cos 6x = 1 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} 2x = \pi + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \cos 6x = -1 \end{cases}$$

$$x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

<u>Cách khác</u>

$$\begin{cases} \cos 8x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 8x = 1 \\ 4x = k2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Trường hợp 4: DÙNG KHẢO SÁT HÀM SỐ

$y = a^x$ là hàm giảm khi $0 < a < 1$.

Do đó ta có

$$|\sin x|^m < |\sin x|^n \Leftrightarrow n > m, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$|\cos x|^m < |\cos x|^n \Leftrightarrow n > m, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$|\sin x|^m \le |\sin x|^n \Leftrightarrow n \ge m, \forall x$$

$$|\cos x|^m \le |\cos x|^n \Leftrightarrow n \ge m, \forall x$$

<u>Bài 171:</u> Giải phương trình: $1 - \frac{x^2}{2} = \cos x \, (*)$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow 1 = \frac{x^2}{2} + \cos x$

Xét $y = \frac{x^2}{2} + \cos x$ trên R

Ta có: $y' = x - \sin x$

và $y'' = 1 - \cos x \ge 0 \, \forall x \in R$

Do đó y'(x) là hàm đồng biến trên R

Vậy $\forall x \in (0, \infty) : x > 0$ nên $y'(x) > y'(0) = 0$

$\forall x \in (-\infty, 0) : x < 0$ nên $y'(x) < y'(0) = 0$

Do đó:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		−	0	+	
y		↘	1	↗	

Vậy : $y = \frac{x^2}{2} + \cos x \ge 1 \ \forall x \in R$

Dấu = của (*) chỉ xảy ra tại x = 0

Do đó $(*) \Leftrightarrow x = 0$ •

Bài 172: Giải phương trình

$\sin^4 x + \sin^6 x = \sin^8 x + \sin^{10} x$ **(*)**

Ta có

$\begin{cases} \sin^4 x \geq \sin^8 x \text{ và dấu = xảy ra khi và chỉ khi } \sin^2 x = 1 \text{ hay } \sin x = 0 \\ \sin^6 x \geq \sin^{10} x \text{ và dấu = xảy ra khi và chỉ khi } \sin^2 x = 1 \text{ hay } \sin x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \vee \sin x = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \quad \vee x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

<u>Cách khác</u>

(*) $\Leftrightarrow \sin^4 x = 0$ *hay* $1 + \sin^2 x = \sin^4 x + \sin^6 x$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ *hay* $\sin^2 x = 1$

<u>BÀI TẬP</u>

Giải các phương trình sau

1. $\lg\left(\sin^2 x\right) - 1 + \sin^3 x = 0$
2. $\sin 4x - \cos 4x = 1 + 4\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
3. $\sin^2 x + \dfrac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x.\sin^2 3x$
4. $\pi^{\sin\sqrt{x}} = |\cos x|$
5. $2\cos x + \sqrt{2}\sin 10x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x.\sin x$
6. $\left(\cos 4x - \cos 2x\right)^2 = 5 + \sin 3x$
7. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(2 - \sin 3x\right)$
8. $\sin 3x\left(\cos 2x - 2\sin 3x\right) + \cos 3x\left(1 + \sin 2x - 2\cos 3x\right) = 0$
9. $\text{tg}x + \text{tg}2x = -\sin 3x\cos 2x$
10. $2\log_a\left(\cot gx\right) = \log_2\left(\cos x\right)$
11. $2^{\sin x} = \cos x$ với $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
12. $\cos^{13} x + \sin^{14} x = 1$
13. $\cos 2x - \cos 6x + 4\left(\sin 2x + 1\right) = 0$
14. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(2 - \cos 3x\right)$
15. $\sin^3 x + \cos^3 x = 2 - \sin^4 x$
16. $\cos^2 x - 4\cos x - 2x\sin x + x^2 + 3 = 0$
17. $2^{|\sin x|} + |\sin x| = \sin^2 x + \cos x$
18. $3\cot g^2 x + 4\cos^2 x - 2\sqrt{3}\cot gx - 4\cos x + 2 = 0$

CHƯƠNG IX

HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. GIẢI HỆ BẰNG PHÉP THẾ

Bài 173: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\cos x - 1 = 0 \ (1) \\ \sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad (2) \end{cases}$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \, (k \in Z)$

Với $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ thay vào (2), ta được

$\sin 2x = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3} + k4\pi\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Với $x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ thay vào (2), ta được

$\sin 2x = \sin\left(-\dfrac{2\pi}{3} + k4\pi\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \neq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (loại)

Do đó nghiệm của hệ là: $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 174: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

Cách 1:

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\dfrac{x+y}{2}.\cos\dfrac{x-y}{2} = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2.\sin\dfrac{\pi}{6}.\cos\dfrac{x-y}{2} = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = k2\pi \\ x+y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 4k\pi \\ x+y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} - k2\pi \end{cases} (k \in Z)$$

Cách 2:

Hệ đã cho

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{3} - x \\ \sin x + \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{3} - x \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}\sin x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{3} - x \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{3} - x \\ \dfrac{\pi}{3} + x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} - k2\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

Bài 175: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} \ (1) \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2} \ (2) \end{cases}$

Cách 1:

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = \sqrt{2} \ (1) \\ 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = \sqrt{2} \ (2) \end{cases}$

Lấy (1) chia cho (2) ta được:

$$\text{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right) = 1 \quad (\text{do} \cos\frac{x-y}{2} = 0 \text{ không là nghiệm của (1) và (2)})$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x + y = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi$$

thay vào (1) ta được: $\sin x + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x + k2\pi\right) = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=h2\pi, h\in\mathbb{Z}$$

Do đó: hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+h2\pi, h\in\mathbb{Z} \\ y=\dfrac{\pi}{4}+(k-h)2\pi, k,h\in\mathbb{Z} \end{cases}$

Cách 2: Ta có $\begin{cases} A=B \\ C=D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+C=B+D \\ A-C=B-D \end{cases}$

Hệ đã cho

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x-\cos x)+(\sin y-\cos y)=0 \\ (\sin x+\cos x)+(\sin y-\cos y)=2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)=0 \\ \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)=0 \\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)=0 \\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \\ \sin\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ y+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+h2\pi \\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ y=\dfrac{\pi}{4}+h2\pi,\ h,k\in Z \end{cases}$$

Bài 176: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} tgx-tgy-tgxtgy=1 & (1) \\ \cos 2y+\sqrt{3}\cos 2x=-1 & (2) \end{cases}$

Ta có: $tgx - tgy = 1 + tgxtgy$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} tg(x-y) = 1 \\ 1 + tgxtgy \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 + tgxtgy = 0 \\ tgx - tgy = 0 \\ 1 + tg^2x = 0 \text{ (VN)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x - y = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in Z), \qquad \text{với } x, y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = y + \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad \text{với } x, y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Thay vào (2) ta được: $\cos 2y + \sqrt{3}\cos\left(2y + \frac{\pi}{2} + k2\pi\right) = -1$

$$\Leftrightarrow \cos 2y - \sqrt{3}\sin 2y = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2y - \frac{1}{2}\cos 2y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2y - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2y - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + h2\pi \text{ hay } 2y - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + h2\pi \quad (h \in Z)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\pi}{6} + h\pi,\ h \in \mathbb{Z} \text{ hay } y = \frac{\pi}{2} + h\pi,\ h \in \mathbb{Z} \text{ (loại)}$$

Do đó:

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} + (k+h)\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + h\pi \end{cases} \qquad (h, k \in Z)$

<u>Bài 177:</u> Giải hệ phương trình $\begin{cases} \cos^3 x - \cos x + \sin y = 0 \ (1) \\ \sin^3 x - \sin y + \cos x = 0 \ (2) \end{cases}$

Lấy (1) + (2) ta được: $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x = -\cos^3 x$$

$$\Leftrightarrow tg^3 x = -1$$

$$\Leftrightarrow tgx = -1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in Z)$$

Thay vào (1) ta được:

$$\sin y = \cos x - \cos^3 x = \cos x\left(1 - \cos^2 x\right)$$

$$= \cos x.\sin^2 x = \frac{1}{2}\sin 2x \sin x$$

$$= \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{4} \text{ (nếu k chẵn)} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \text{ (nếu k lẻ)} \end{cases}$$

Đặt $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (với $0 < \alpha < 2\pi$)

Vậy nghiệm hệ $\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z} \\ \left[\begin{array}{l} y = \alpha + h2\pi,\ h \in \mathbb{Z} \\ y = \pi - \alpha + h2\pi,\ h \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + (2m+1)\pi,\ m \in \mathbb{Z} \\ \left[\begin{array}{l} y = -\alpha + 2h\pi,\ h \in \mathbb{Z} \\ y = \pi + \alpha + h2\pi,\ h \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \end{cases}$

II. GIẢI HỆ BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG

Bài 178: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x.\cos y = -\dfrac{1}{2} & (1) \\ \text{tg}x.\text{cotg}y = 1 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $\cos x.\sin y \neq 0$

Cách 1: Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right] = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sin x.\cos y}{\cos x.\sin y} - 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) + \sin(x-y) = -1 \\ \sin x\cos y - \sin y\cos x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) + \sin(x-y) = -1 \\ \sin(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = -1 \\ \sin(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x - y = h\pi,\ h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + (2k+h)\dfrac{\pi}{2},\ k,h \in \mathbb{Z} \\ y = -\dfrac{\pi}{4} + (2k-h)\dfrac{\pi}{2},\ k,h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(nhận do $\sin y\cos x \neq 0$)

Cách 2: $(2) \Leftrightarrow \dfrac{\sin x \cos y}{\cos x \sin y} = 1 \Leftrightarrow \sin x \cos y = \cos x \sin y$

Thế (1) vào (2) ta được: $\begin{cases} \sin x \cos y = -\dfrac{1}{2} & (3) \\ \cos x \sin y = -\dfrac{1}{2} & (4) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = -1 & (3)+(4) \\ \sin(x-y) = 0 & (3)-(4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x - y = h\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + (2k+h)\dfrac{\pi}{2} \\ y = -\dfrac{\pi}{4} + (2k-h)\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad (h, k \in Z)$$

III. GIẢI HỆ BẰNG ẨN PHỤ

Bài 179: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} tgx + tgy = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} & (1) \\ \text{cotg}x + \text{cotg}y = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3} & (2) \end{cases}$$

Đặt $X = tgx, Y = tgy$

Hệ đã cho thành: $\begin{cases} X + Y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{Y} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{Y + X}{YX} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ XY = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ X^2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}X - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \sqrt{3} \\ Y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} X = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ Y = \sqrt{3} \end{cases}$$

Do đó:

Hệ đã cho : $\Leftrightarrow \begin{cases} tgx = \sqrt{3} \\ tgy = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} tgx = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ tgy = \sqrt{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + h\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ y = \dfrac{\pi}{3} + h\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Bài 180: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \cos 2x + \cos 2y = m \end{cases}$

a/ Giải hệ phương trình khi $m = -\dfrac{1}{2}$

b/ Tìm m để hệ có nghiệm.

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \left(1 - 2\sin^2 x\right) + \left(1 - 2\sin^2 y\right) = m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{2-m}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \left(\sin x + \sin y\right)^2 - 2\sin x \sin y = 1 - \dfrac{m}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} - 2\sin x \sin y = 1 - \dfrac{m}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \sin x \sin y = -\dfrac{3}{8} + \dfrac{m}{4} \end{cases}$$

Đặt $X = \sin x, Y = \sin y$ với $|X|, |Y| \le 1$

thì X, Y là nghiệm của hệ phương trình

$t^2 - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{m}{4} - \dfrac{3}{8} = 0\ (*)$

a/ Khi $m = -\dfrac{1}{2}$ thì $(*)$ thành :

$$t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = -\frac{1}{2}$$

Vậy hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} \sin x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin y = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ y = -(-1)^h \dfrac{\pi}{6} + h\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -(-1)^h \dfrac{\pi}{6} + h\pi, h \in \mathbb{Z} \\ y = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

b/ Ta có : $(*) \Leftrightarrow \dfrac{m}{4} = -t^2 + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{3}{8}$

Xét $y = -t^2 + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{3}{8}$ (C) trên $D = [-1,1]$

thì: $y' = -2t + \dfrac{1}{2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{4}$

t	−1		1/4		1
y'		+	0	−	
y	$-\frac{9}{8}$	↗	$\frac{7}{16}$	↘	$-\frac{1}{8}$

Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm trên $[-1,1]$

$\Leftrightarrow (d)\ y = \dfrac{m}{4}$ cắt (C) tại 2 điểm hoặc tiếp xúc trên $[-1,1]$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{8} \le \frac{m}{4} \le \frac{7}{16}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m \le \frac{7}{4}$$

Cách khác

$ycbt \Leftrightarrow f(t) = 8t^2 - 4t - 3 + 2m = 0$ có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa

$\Leftrightarrow -1 \le t_1 \le t_2 \le 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 28 - 16m \geq 0 \\ af(1) = 1 + 2m \geq 0 \\ af(-1) = 9 + 2m \geq 0 \\ -1 \leq \dfrac{S}{2} = \dfrac{1}{4} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{7}{4}$$

Bài 181: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sin^2 x + m\,\text{tg}y = m \\ \text{tg}^2 y + m\sin x = m \end{cases}$

a/ Giải hệ khi m = -4

b/ Với giá trị nào của m thì hệ có nghiệm.

Đặt $X = \sin x$ với $|X| \leq 1$

$Y = \text{tg}y$

Hệ thành: $\begin{cases} X^2 + mY = m & (1) \\ Y^2 + mX = m & (2) \end{cases}$

Lấy (1) – (2) ta được: $X^2 - Y^2 + m(Y - X) = 0$

$\Leftrightarrow (X - Y)(X + Y - m) = 0$

$\Leftrightarrow X = Y \vee Y = m - X$

Hệ thành $\begin{cases} X = Y \\ X^2 + mX = m \end{cases}$ *hay* $\begin{cases} Y = m - X \\ X^2 + m(m - X) = m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = Y \\ X^2 + mX - m = 0 \quad (*) \end{cases} \vee \begin{cases} Y = m - X \\ X^2 - mX + m^2 - m = 0 \quad (**) \end{cases}$$

a/Khi m = -4 ta được hệ

$$\begin{cases} X = Y \\ X^2 - 4X + 4 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} Y = -4 - X \\ X^2 + 4X + 20 = 0 (\text{vô nghiệm}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 2 (\text{loại do} |X| \leq 1) \\ Y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho vô nghiệm khi m = 4.

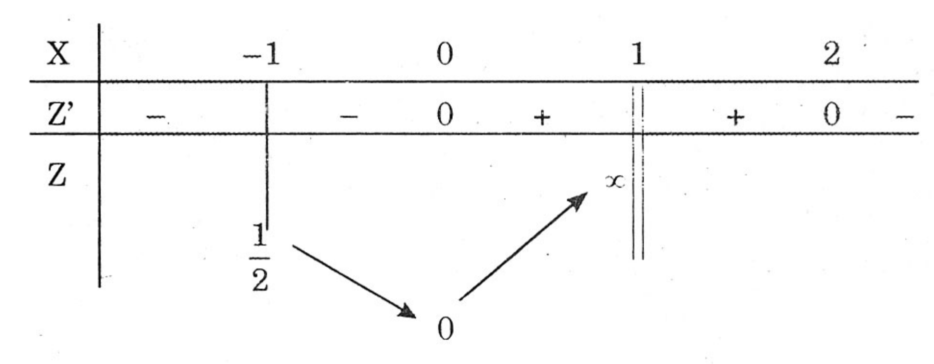
b/ Ta có (*) $\Leftrightarrow X^2 + mX - m = 0$ với $|X| \leq 1$

$\Leftrightarrow X^2 = m(1 - X)$

$\Leftrightarrow \dfrac{X^2}{1 - X} = m$ (do m không là nghiệm của *)

Xét $Z = \dfrac{X^2}{1 - X}$ trên $[-1, 1) \Rightarrow Z' = \dfrac{-X^2 + 2X}{(1 - X)^2}$;

$Z' = 0 \Leftrightarrow X = 0 \vee X = 2$



Do đó hệ $\begin{cases} X = Y\ (|X| \le 1) \\ X^2 + mX - m = 0 \end{cases}$ có nghiệm $\Leftrightarrow m \ge 0$

Xét (**): $X^2 - mX + m^2 - m = 0$

Ta có $\Delta = m^2 - 4(m^2 - m) = -3m^2 + 4m$

$\Delta \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le \frac{4}{3}$

Kết luận: •Khi $m \ge 0$ thì (I) có nghiệm nên hệ đã cho có nghiệm

• Khi $m < 0$ thì (I) vô nghiệm mà (**) cùng vô nghiệm (do $\Delta < 0$) nên hệ đã cho vô nghiệm

Do đó: Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m \ge 0$

Cách khác

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow f(X) = X^2 + mX - m = 0$ (*)hay

$g(X) = X^2 - mX + m^2 - m = 0$ (**) có nghiệm trên [-1,1]

$$\Leftrightarrow f(-1)f(1) \le 0 \ hay \begin{cases} \Delta_1 = m^2 + 4m \ge 0 \\ af(1) \ge 0 \\ af(-1) \ge 0 \\ -1 \le \frac{S}{2} = \frac{-m}{2} \le 1 \end{cases}$$

$$hay\ g(-1)g(1) \le 0 \ hay \begin{cases} \Delta_2 = -3m^2 + 4m \ge 0 \\ ag(-1) = m^2 + 1 \ge 0 \\ ag(1) = (m-1)^2 \ge 0 \\ -1 \le \frac{S}{2} = \frac{m}{2} \le 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2m \le 0 \ hay \begin{cases} \Delta_1 = m^2 + 4m \ge 0 \\ 1 - 2m \ge 0 \\ -2 \le m \le 2 \end{cases} \quad hay\ m = 1\ hay\ 0 \le m \le \frac{4}{3}$$

$\Leftrightarrow m \ge 0$

IV. HỆ KHÔNG MẪU MỰC

Bài 182: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} tgx + cotgx = 2\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) & (1) \\ tgy + cotgy = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) & (2) \end{cases}$

Cách 1:

Ta có: $tg\alpha + cotg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

Vậy hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sin 2x} = \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) & (1) \\ \frac{1}{\sin 2y} = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) & (2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \sin 2x \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) & (1) \\ 1 = \sin 2y.\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) & (2) \end{cases}$$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{4} + h2\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ y = -\frac{3\pi}{4} + h2\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Thay $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{4} + h2\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$ vào (2) ta được

$\sin 2y.\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2}.\sin k\pi = 0 \neq 1$ (loại)

Thay $\begin{cases} x = \frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ y = -\frac{3\pi}{4} + h2\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$ vào (2) ta được

$$\sin 2y.\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$= \sin\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} 1 & (\text{nếu k lẻ}) \\ -1 & (\text{nếu k chẵn}) \end{cases}$$

Do đó hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + (2m+1)\pi \\ y = -\dfrac{3\pi}{4} + h2\pi \end{cases} \quad (m, h \in Z) \bullet$$

Cách 2:

Do bất đẳng thức Cauchy

$|tgx + cotgx| \geq 2$

dấu = xảy ra $\Leftrightarrow tgx = cotgx \Leftrightarrow tgx = \dfrac{1}{tgx}$

$\Leftrightarrow tgx = \pm 1$

Do đó:

$|tgx + cotgx| \geq 2 \geq \left|2\sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

Dấu = tại (1) chỉ xảy ra khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} tgx = 1 \\ \sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} tgx = -1 \\ \sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ y = \dfrac{\pi}{4} + h2\pi, \ h \in \mathbb{Z} \end{cases} (I) \vee \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ y = -\dfrac{3\pi}{4} + h2\pi, \ h \in \mathbb{Z} \end{cases} (II)$$

thay (I) vào (2): $tgy + cotgy = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

ta thấy $2 = 2\sin k\pi = 0$ không thỏa

thay (II) vào (2) ta thấy $2 = 2\sin\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$

chỉ thỏa khi k lẻ

Vậy: hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + (2m+1)\pi \\ y = -\dfrac{3\pi}{4} + 2h\pi \end{cases}$, $m, h \in \mathbb{Z}$

Bài 183: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = m & (1) \\ 2(\cos 2x + \cos 2y) - 1 - 4\cos^2 m = 0 & (2) \end{cases}$$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = m \\ 4\cos(x+y)\cos(x-y) = 1 + 4\cos^2 m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = m \\ -4\cos(x+y)\cos m + 4\cos^2 m + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = m \\ [2\cos m - \cos(x+y)]^2 + 1 - \cos^2(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = m \\ [2\cos m - \cos(x+y)]^2 + \sin^2(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = m \\ \cos(x+y) = 2\cos m \\ \sin(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = m \\ x + y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \cos(k\pi) = 2\cos m \end{cases}$$

Do đó hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m = \pm\frac{\pi}{3} + h2\pi \vee m = \pm\frac{2\pi}{3} + h2\pi,\ h \in \mathbb{Z}$

BÀI TẬP

1. Giải các hệ phương trình sau:

a/ $\begin{cases} \sin x + \sin y = 2 \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 2 \end{cases}$

b/ $\begin{cases} \sin x \sin y = -\frac{1}{2} \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}$

c/ $\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = 1 + \cos y \\ \sqrt{2}\sin x = \sin y \end{cases}$

d/ $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4} \\ 3\text{tg}x = \text{tg}y \end{cases}$

e/ $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y \\ \cos^2 x = \sin x \sin y \end{cases}$

f/ $\begin{cases} \text{tg}x + \text{tg}y + \text{tg}x\text{tg}y = 1 \\ 3\sin 2y - 2 = \cos 4x \end{cases}$

g/ $\begin{cases} \sin x - \sin 2y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x + \cos 2y = \frac{1}{2} \end{cases}$

h/ $\begin{cases} \cos(x+y) = 2\cos(x-y) \\ \cos x.\cos y = \frac{3}{4} \end{cases}$

k/ $\begin{cases} \sin x = 7\cos y \\ 5\sin y = \cos x - 6 \end{cases}$

l/ $\begin{cases} \text{tg}x + \text{tg}y = 1 \\ \text{tg}\frac{x}{2} + \text{tg}\frac{y}{2} = 2 \end{cases}$

2. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \cos x \cos y = m + 1 \\ \sin x \sin y = 4m^2 + 2m \end{cases}$

a/ Giải hệ khi $m = -\frac{1}{4}$

b/ Tìm m để hệ có nghiệm $\left(\text{ĐS } -\dfrac{3}{4} \le m \le -\dfrac{1}{4} \text{ hay } m=0\right)$

3. Tìm a để hệ sau đây có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} y^2 + tg^2x = 1 \\ y + 1 = ax^2 + a + |\sin x| \end{cases} \qquad (\text{ĐS } a=2)$$

4. Tìm m để các hệ sau đây có nghiệm.

$$a/\begin{cases} \cos x = m\cos^3 y \\ \sin x = m\cos^3 y \end{cases} \qquad b/\begin{cases} \sin x\cos y = m^2 \\ \sin y\cos x = m \end{cases}$$

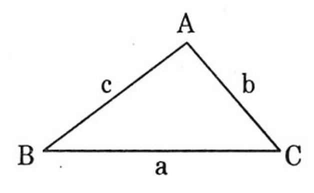
$$(\text{ĐS } 1 \le |m| \le 2) \qquad \left(\text{ĐS } \frac{1-\sqrt{5}}{2} \le m \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

CHƯƠNG X:
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

I. ĐỊNH LÝ HÀM SIN VÀ COSIN

Cho ΔABC có a, b, c lần lượt là ba cạnh đối diện của $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, S là diện tích ΔABC thì

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 4S.\text{cotg}A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = a^2 + c^2 - 4S.\text{cotg}B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = a^2 + b^2 - 4S.\text{cotg}C$$



Bài 184 Cho ΔABC. Chứng minh:
$A = 2B \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc$

Ta có: $a^2 = b^2 + bc \Leftrightarrow 4R^2\sin^2 A = 4R^2\sin^2 B + 4R^2\sin B.\sin C$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A - \sin^2 B = \sin B\sin C$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-\cos 2A) - \frac{1}{2}(1-\cos 2B) = \sin B\sin C$$
$$\Leftrightarrow \cos 2B - \cos 2A = 2\sin B\sin C$$
$$\Leftrightarrow -2\sin(B+A)\sin(B-A) = 2\sin B\sin C$$
$$\Leftrightarrow \sin(B+A)\sin(A-B) = \sin B\sin C$$
$$\Leftrightarrow \sin(A-B) = \sin B \quad (\text{do } \sin(A+B) = \sin C > 0)$$
$$\Leftrightarrow A - B = B \vee A - B = \pi - B\,(\text{loại})$$
$$\Leftrightarrow A = 2B$$

Cách khác:

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin B\sin C$$
$$\Leftrightarrow (\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B) = \sin B\sin C$$
$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = \sin B\sin C$$
$$\Leftrightarrow \sin(B+A)\sin(A-B) = \sin B\sin C$$
$$\Leftrightarrow \sin(A-B) = \sin B \quad (\text{do } \sin(A+B) = \sin C > 0)$$
$$\Leftrightarrow A - B = B \vee A - B = \pi - B\,(\text{loại})$$
$$\Leftrightarrow A = 2B$$

Bài 185: Cho ΔABC. Chứng minh: $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C} = \dfrac{a^2-b^2}{c^2}$

Ta có $\dfrac{a^2-b^2}{c^2} = \dfrac{4R^2\sin^2 A - 4R^2\sin^2 B}{4R^2\sin^2 C}$

$$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\frac{1}{2}(1-\cos 2A) - \frac{1}{2}(1-\cos 2B)}{\sin^2 C}$$

$$= \frac{\cos 2B - \cos 2A}{2\sin^2 C} = \frac{-2\sin(A+B)\sin(B-A)}{2\sin^2 C}$$

$$= \frac{\sin(A+B).\sin(A-B)}{\sin^2 C} = \frac{\sin(A-B)}{\sin C}$$

$(\text{do } \sin(A+B) = \sin C > 0)$

Bài 186: Cho ΔABC biết rằng $\text{tg}\dfrac{A}{2}\cdot\text{tg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{3}$.

Chứng minh $a + b = 2c$

Ta có : $\text{tg}\dfrac{A}{2}\cdot\text{tg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} = \cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}$

$$\left(\text{do } \cos\frac{A}{2} > 0, \cos\frac{B}{2} > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\left[\cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right] = \cos\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2} = 2\cos\frac{A+B}{2} \quad (*)$$

Mặt khác: $a + b = 2R(\sin A + \sin B)$

$$= 4R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 8R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} \quad (\text{do } (*))$$

$$= 4R\sin(A+B)$$

$$= 4R\sin C = 2c$$

Cách khác:

$a + b = 2c$

$\Leftrightarrow 2R(\sin A + \sin B) = 4R\sin C$

$\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} = 4\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{A-B}{2} = 2\sin\dfrac{C}{2} = 2\cos\dfrac{A+B}{2} \quad \left(\text{do } \sin\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$$

Bài 187: Cho ΔABC, chứng minh nếu $\operatorname{cotg}A, \operatorname{cotg}B, \operatorname{cotg}C$ tạo một cấp số cộng thì a^2, b^2, c^2 cũng là cấp số cộng.

Ta có: $\cot gA, \cot gB, \cot gC$ là cấp số cộng $\Leftrightarrow \cot gA + \cot gC = 2\cot gB \ (*)$

Cách 1:

Ta có: $(*)$ $\Leftrightarrow \dfrac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C} = \dfrac{2\cos B}{\sin B} \Leftrightarrow \sin^2 B = 2\sin A\sin C\cos B$

$$\Leftrightarrow \sin^2 B = -\left[\cos(A+C) - \cos(A-C)\right]\left[-\cos(A+C)\right]$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 B = \cos^2(A+C) - \cos(A-C)\cos(A+C)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 B = \cos^2 B - \frac{1}{2}\left[\cos 2A + \cos 2C\right]$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 B = \left(1 - \sin^2 B\right) - \frac{1}{2}\left[\left(1 - 2\sin^2 A\right) + \left(1 - 2\sin^2 C\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2 C$$

$$\Leftrightarrow \frac{2b^2}{4R^2} = \frac{a^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2}$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 = a^2 + c^2$$

$\Leftrightarrow a^2, b^2, c^2$ là cấp số cộng •

Cách 2:

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos A$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 4\left(\frac{1}{2}bc\sin A\right).\operatorname{cotg}A$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 4S\cot gA$$

Do đó $\operatorname{cotg}A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

Tương tự $\operatorname{cotg}B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}, \operatorname{cotg}C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

Do đó: $(*)$ $\Leftrightarrow \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} = 2\cdot\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}$

$$\Leftrightarrow 2b^2 = a^2 + c^2$$

Bài 188: Cho ΔABC có $\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$

Chứng minh $\widehat{BAC} \le 60^0$.

Ta có: $\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} = \frac{2a^2}{4R^2}$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2 \, (*)$$

Do định lý hàm cosin nên ta có

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - b^2 - c^2}{4bc} \quad (\text{do } (*))$$

$$= \frac{b^2 + c^2}{4bc} \geq \frac{2bc}{4bc} = \frac{1}{2} \qquad (\text{do Cauchy})$$

Vậy : $\widehat{BAC} \leq 60^0$.

Cách khác:

định lý hàm cosin cho

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cos A$

Do đó

$(*) \Leftrightarrow a^2 + 2bc\cos A = 2a^2$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2}{4bc} \geq \frac{1}{2} (\text{do Cauchy})$$

Bài 189: Cho ΔABC. Chứng minh :

$$\text{cotgA+cotgB+cotgC} = \frac{R\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{abc}$$

Ta có: $\text{cotgA} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

Tương tự: $\cot gB = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}, \cot gC = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

Do đó $\cot gA + \cot gB + \cot gC = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4\dfrac{abc}{4R}}$

$$= R\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$$

Bài 190: Cho ΔABC có 3 góc A, B, C tạo thành một cấp số nhân có công bội q = 2. Giả sử A < B < C.

Chứng minh: $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

Do A, B, C là cấp số nhân có q = 2 nên B = 2A, C = 2B = 4A

$$\text{Mà } A + B + C = \pi \text{ nên } A = \frac{\pi}{7}, B = \frac{2\pi}{7}, C = \frac{4\pi}{7}$$

Cách 1:

Ta có: $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2R\sin B}+\frac{1}{2R\sin C}$

$$=\frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}}\right)$$

$$=\frac{1}{2R}\frac{\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}}$$

$$=\frac{1}{2R}\cdot\frac{2\sin\frac{3\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}.\sin\frac{3\pi}{7}}\left(\text{do}\sin\frac{4\pi}{7}=\sin\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{R}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{2R\sin A}$$

$$=\frac{1}{a}$$

Cách 2:

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Leftrightarrow\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 4A}=\frac{\sin 4A+\sin 2A}{\sin 2A\sin 4A}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sin A}=\frac{2\sin 3A.\cos A}{\sin 2A\sin 4A}=\frac{2\cos A}{\sin 2A}=\frac{2\cos A}{2\sin A\cos A}$$

do : $\sin 3A=\sin\frac{3\pi}{7}=\sin\frac{4\pi}{7}=\sin 4A$ •

Bài 191: Tính các góc của ΔABC nếu

$$\frac{\sin A}{1}=\frac{\sin B}{\sqrt{3}}=\frac{\sin C}{2}$$

Do định lý hàm sin: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

nên : $\frac{\sin A}{1}=\frac{\sin B}{\sqrt{3}}=\frac{\sin C}{2}\ (*)$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{2R}=\frac{b}{2R\sqrt{3}}=\frac{c}{4R}$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{b}{\sqrt{3}}=\frac{c}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a\sqrt{3}\\c=2a\end{cases}$$

Ta có: $c^2 = 4a^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2$

$\Leftrightarrow c^2 = b^2 + a^2$

Vậy ΔABC vuông tại C

Thay $\sin C = 1$ vào $(*)$ ta được

$$\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \dfrac{1}{2} \\ \sin B = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 30^0 \\ B = 60^0 \end{cases}$$

Ghi chú:

Trong tam giác ABC ta có

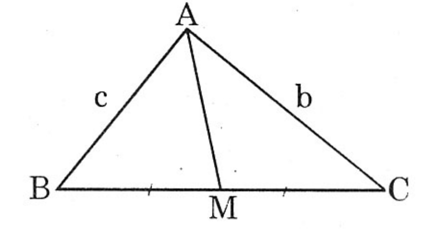
$a = b \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow \sin A = \sin B \Leftrightarrow \cos A = \cos B$

II. ĐỊNH LÝ VỀ ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN

Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM thì:

$$\boxed{AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}}$$

hay : $\boxed{c^2 + b^2 = 2m_a^2 + \dfrac{a^2}{2}}$



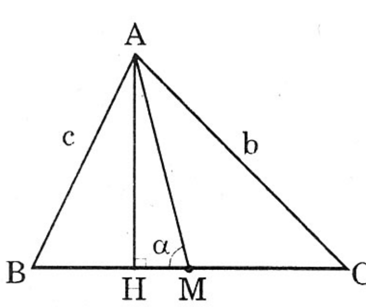
Bài 192: Cho $\triangle ABC$ có AM trung tuyến, $\widehat{AMB} = \alpha$, AC = b, AB = c, S là diện tích $\triangle ABC$. Với $0 < \alpha < 90^0$

a/ Chứng minh: $\text{cotg}\alpha = \dfrac{b^2 - c^2}{4S}$

b/ Giả sử $\alpha = 45^0$, chứng minh: cotgC – cotgB = 2

a/ $\triangle AHM$ vuông $\Rightarrow \text{cotg}\alpha = \dfrac{HM}{AH} = \dfrac{MB - BH}{AH}$

$\Rightarrow \text{cotg}\alpha = \dfrac{a}{2AH} - \dfrac{BH}{AH}$ (1)



Mặt khác: $\dfrac{b^2-c^2}{4S}=\dfrac{\left(a^2+c^2-2ac\cos B\right)-c^2}{2AH.a}$

Đặt BC = a

$\Rightarrow \dfrac{b^2-c^2}{4S}=\dfrac{a}{2AH}-\dfrac{c\cos B}{AH}=\dfrac{a}{2AH}-\dfrac{BH}{AH}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được : $\cot g\,\alpha=\dfrac{b^2-c^2}{4S}$

Cách khác:

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích tam giác ABH và ACH

Áp dụng định lý hàm cos trong tam giác ABH và ACH ta có:

$\cot g\,\alpha=\dfrac{AM^2+BM^2-c^2}{4S_1}$ (3)

$-\cot g\,\alpha=\dfrac{AM^2+CM^2-b^2}{4S_2}$ (4)

Lấy (3) – (4) ta có :

$\cot g\,\alpha=\dfrac{b^2-c^2}{4S}$ (vì $S_1=S_2=\dfrac{S}{2}$)

b/Ta có: $\cot gC-\cot gB=\dfrac{HC}{AH}-\dfrac{HB}{AH}=\dfrac{HC-HB}{AH}$

$=\dfrac{(MH+MC)-(MB-MH)}{AH}$

$=\dfrac{2MH}{AH}=2\cot g\,\alpha=2\cot g\,45^0=2$

Cách khác:

Áp dụng định lý hàm cos trong tam giác ABM và ACM ta có:

$\cot g\,B=\dfrac{BM^2+c^2-AM^2}{4S_1}$ (5)

$\cot g\,C=\dfrac{CM^2+b^2-AM^2}{4S_2}$ (6)

Lấy (6) – (5) ta có :

$\cot g\,C-\cot gB=\dfrac{b^2-c^2}{2S}=2\cot g\alpha=2$ (vì $S_1=S_2=\dfrac{S}{2}$ và câu a)

Bài 193 Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến phát xuất từ B và C là m_b, m_c thỏa $\dfrac{c}{b}=\dfrac{m_b}{m_c}\neq 1$. Chứng minh: 2cotgA = cotgB + cotgC

Ta có: $\frac{c^2}{b^2} = \frac{m_b^2}{m_c^2}$

$\Leftrightarrow \frac{c^2}{b^2} = \frac{\frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}\right)}{\frac{1}{2}\left(b^2 + a^2 - \frac{c^2}{2}\right)}$

$\Leftrightarrow b^2c^2 + a^2c^2 - \frac{c^4}{2} = a^2b^2 + b^2c^2 - \frac{b^4}{2}$

$\Leftrightarrow a^2c^2 - a^2b^2 = \frac{1}{2}\left(c^4 - b^4\right)$

$\Leftrightarrow a^2\left(c^2 - b^2\right) = \frac{1}{2}\left(c^2 - b^2\right)\left(c^2 + b^2\right)$

$\Leftrightarrow 2a^2 = c^2 + b^2 \ (1)\left(\text{do } \frac{c}{b} \neq 1\right)$

Thay $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cos A$ vào (1), ta có (1) thành

$a^2 = 2bc\cos A$

$\Leftrightarrow \cos A = \frac{a^2}{2bc} = \frac{4R^2\sin^2 A}{2(2R\sin B)(2R\sin C)}$

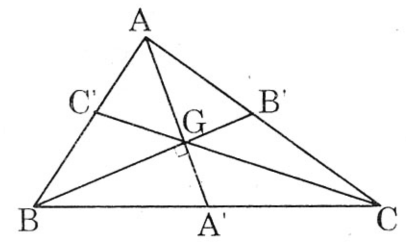
$\Leftrightarrow 2\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{\sin B\sin C} = \frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}$

$\Leftrightarrow 2\,\text{cotg}A = \frac{\sin B\cos C + \sin C\cos B}{\sin B\sin C} = \text{cotg}C + \text{cotg}B$

Bài 194: Chứng minh nếu $\triangle ABC$ có trung tuyến AA' vuông góc với trung tuyến BB' thì cotgC = 2 (cotgA + cotgB)

$\triangle GAB$ vuông tại G có GC' trung tuyến nên AB = 2GC'

Vậy $AB = \frac{2}{3}CC'$



$\Leftrightarrow 9c^2 = 4m_c^2$

$\Leftrightarrow 9c^2 = 2\left(b^2 + a^2 - \frac{c^2}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 5c^2 = a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow 5c^2 = c^2 + 2ab\cos C$ (do định lý hàm cos)

$\Leftrightarrow 2c^2 = ab\cos C$

$\Leftrightarrow 2(2R\sin C)^2 = (2R\sin A)(2R\sin B)\cos C$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 C = \sin A\sin B\cos C$

$\Leftrightarrow \frac{2\sin C}{\sin A\sin B} = \frac{\cos C}{\sin C}$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin(A+B)}{\sin A\sin B} = \text{cotg}C$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\sin A\cos B + \sin B\cos A)}{\sin A\sin B} = \text{cotg}C$$

$$\Leftrightarrow 2(\text{cotg}B + \text{cotg}A) = \text{cotg}C$$

III. DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Gọi S: diện tích $\triangle ABC$

R: bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

r: bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$

p: nửa chu vi của $\triangle ABC$

thì

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = pr$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Bài 195: Cho $\triangle ABC$ chứng minh: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{2S}{R^2}$

Ta có:

$$\sin 2A + (\sin 2B + \sin 2C)$$

$$= \sin 2A + 2\sin(B + C).\cos(B - C)$$

$$= 2\sin A\cos A + 2\sin A\cos(B - C)$$

$$= 2\sin A[\cos A + \cos(B - C)]$$

$$= 2\sin A[-\cos(B + C) + \cos(B - C)]$$

$$= 2\sin A.[2\sin B.\sin C]$$

$$= 4.\frac{a}{2R}.\frac{b}{2R}.\frac{c}{2R} = \frac{1}{2}\frac{abc}{R^3} = \frac{1}{2}\frac{4RS}{R^3} = \frac{2S}{R^2}$$

Bài 196 Cho $\triangle ABC$. Chứng minh :

$$S = \text{Diện tích } (\triangle ABC) = \frac{1}{4}\left(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A\right)$$

Ta có : $S = dt(\Delta ABC) = \frac{1}{2}ab\sin C$

$$= \frac{1}{2}ab\sin(A + B)$$

$$= \frac{1}{2}ab\left[\sin A\cos B + \sin B\cos A\right]$$

$$= \frac{1}{2}ab\left[\left(\frac{a}{b}\sin B\right)\cos B + \left(\frac{b}{a}\sin A\right)\cos A\right] \text{(do đl hàm sin)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[a^2\sin B\cos B + b^2\sin A\cos A\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A\right)$$

Bài 197: Cho ΔABC có trọng tâm G và $\widehat{GAB} = \alpha, \widehat{GBC} = \beta, \widehat{GCA} = \gamma$.

Chứng minh: $\text{cotg}\alpha + \text{cotg}\beta + \text{cotg}\gamma = \dfrac{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{4S}$

Gọi M là trung điểm BC, vẽ $MH \perp AB$

$\Delta AMH \perp \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{AH}{AM}$

$\Delta BHM \perp \Rightarrow \cos B = \dfrac{BH}{MB} = \dfrac{2BH}{a}$

Ta có: AB = HA + HB

$\Leftrightarrow c = AM\cos\alpha + \dfrac{a}{2}\cos B$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{AM}\left(c - \dfrac{a}{2}\cos B\right) \quad (1)$

Mặt khác do áp dụng định lý hàm sin vào ΔAMB ta có :

$$\frac{MB}{\sin\alpha} = \frac{AM}{\sin B} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{AM}MB\sin B = \frac{a}{2AM}\sin B \quad (2)$$

Lấy (1) chia cho (2) ta được :

$$\text{cotg}\alpha = \frac{c - \frac{a}{2}\cos B}{\frac{a}{2}\sin B} = \frac{2c - a\cos B}{a.\frac{b}{2R}}$$

$$= \frac{R(4c - 2a\cos B)}{ab} = \frac{R\left(4c^2 - 2ac\cos B\right)}{abc}$$

$$= \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{\frac{abc}{R}} = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4S}$$

Chứng minh tương tự :

$$\text{cotg}\beta = \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{4S}$$

$$\text{cotg}\gamma = \frac{3b^2 + a^2 - c^2}{4S}$$

Do đó:

$$\text{cotg}\alpha + \text{cotg}\beta + \text{cotg}\gamma$$

$$= \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4S} + \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{4S} + \frac{3b^2 + a^2 - c^2}{4S}$$

$$= \frac{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{4S}$$

Cách khác : Ta có $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ (*)

$$\text{cotg}\alpha = \frac{c^2 + m_a^2 - \frac{a^2}{4}}{4S_{\Delta ABM}} = \frac{4c^2 + 4m_a^2 - a^2}{8S} \text{(a)}$$

Tương tự $\text{cotg}\beta = \frac{4a^2 + 4m_b^2 - b^2}{8S}\text{(b)}, \text{cotg}\gamma = \frac{4b^2 + 4m_c^2 - c^2}{8S}\text{(c)}$

Cộng (a), (b), (c) và kết hợp (*) ta có:

$$\text{cotg}\,\alpha + \text{cotg}\,\beta + \text{cotg}\,\gamma = \frac{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{4S}$$

IV. BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN

Gọi R bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

và r bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC thì

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{abc}{4S}$$

$$r = \frac{S}{p}$$

$$r = (p - a)\,\text{tg}\frac{A}{2} = (p - b)\,\text{tg}\frac{B}{2} = (p - c)\,\text{tg}\frac{C}{2}$$

Bài 198: Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Chứng minh:

a/ $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

b/ $IA.IB.IC = 4Rr^2$

a/ Ta có : $\Delta IBH \perp \Rightarrow \text{cotg}\frac{B}{2} = \frac{BH}{IH}$

$$\Rightarrow BH = r\text{cotg}\frac{B}{2}$$

Tương tự $HC = r\,\text{cotg}\frac{C}{2}$

Mà : BH + CH = BC

nên

$$r\left(\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}\right) = a$$

$$\Leftrightarrow \frac{r\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = a$$

$$\Leftrightarrow r\cos\frac{A}{2} = (2R\sin A)\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow r\cos\frac{A}{2} = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.\ \ (\text{do } \cos\frac{A}{2} > 0)$$

b/ Ta có : $\Delta \perp AKI \Rightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{IK}{IA} \Rightarrow IA = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$

Tương tự $IB = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}};\ IC = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$

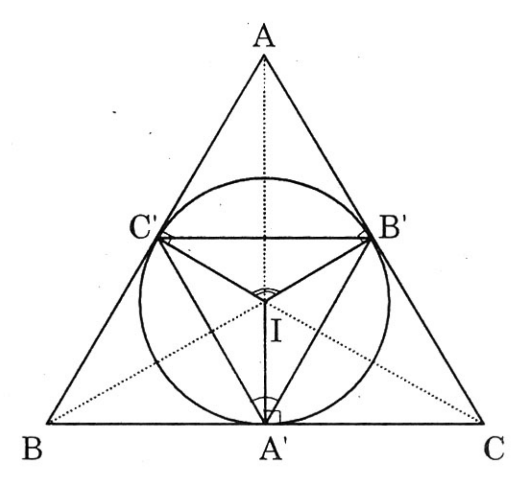
Do đó : $IA.IB.IC = \frac{r^3}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$

$$= \frac{r^3}{\frac{r}{4R}} = 4Rr^2 \text{ (do kết quả câu a)}$$

Bài 199: Cho ΔABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc các cạnh ΔABC tại A', B', C'. $\Delta A'B'C'$ có các cạnh là a', b', c' và diện tích S'. Chứng minh:

a/ $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\right)$

b/ $\frac{S'}{S} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$



a/ Ta có : $\widehat{C'A'B'} = \frac{1}{2}\widehat{C'IB'} = \frac{1}{2}(\pi - A) = \frac{1}{2}(B + C)$

Áp dụng định lý hình sin vào $\Delta A'B'C'$

$\frac{a'}{\sin A'} = 2r$ (r: bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC)

$\Rightarrow a' = 2r\sin\widehat{A'} = 2r\sin\frac{B + C}{2}$ (1)

ΔABC có : $a = BC = BA' + A'C$

$$\Rightarrow a = r\cot g\frac{B}{2} + r\cot g\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow a = r\frac{\sin\frac{B + C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \quad (2)$$

Lấy $\frac{(1)}{(2)}$ ta được $\frac{a'}{a} = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Tương tự $\frac{b'}{b} = 2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}$

Vậy $$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\right).$$

b/ Ta có: $$\widehat{A'C'B'} = \frac{1}{2}.B'IA' = \frac{1}{2}(\pi - C) = \frac{1}{2}(A + B)$$

Vậy $$\sin C' = \sin\frac{A + B}{2} = \cos\frac{C}{2}$$

Ta có: $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{dt(\Delta A'B'C')}{dt(\Delta ABC)} = \dfrac{\frac{1}{2}a'b'\sin C'}{\frac{1}{2}ab\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{S'}{S} = \left(\frac{a'}{a}\right)\left(\frac{b'}{b}\right)\frac{\sin C'}{\sin C}$$

$$= 4\sin\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\cdot\frac{\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$= 2\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}$$

Bài 200: Cho ΔABC có trọng tâm G và tâm đường tròn nội tiếp I. Biết GI vuông góc với đường phân giác trong của $\widehat{BCA}$. Chứng minh:

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b}$$

Vẽ $GH \perp AC, GK \perp BC, ID \perp AC$

IG cắt AC tại L và cắt BC tại N

Ta có: $Dt(\Delta CLN) = 2Dt(\Delta LIC)$

$= ID.LC = r.LC$ (1)

Mặt khác:

$Dt(\Delta CLN) = Dt(\Delta GLC) + Dt(\Delta GCN)$

$= \frac{1}{2}(GH.LC + GK.CN)$ (2)

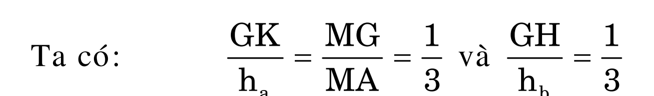
Do ΔCLN cân nên LC = CN

Từ (1) và (2) ta được:

$$rLC = \frac{1}{2}LC(GH + GK)$$

$\Leftrightarrow 2r = GH + GK$

Gọi h_a, h_b là hai đường cao ΔABC phát xuất từ A, B



Ta có: $\dfrac{GK}{h_a} = \dfrac{MG}{MA} = \dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{GH}{h_b} = \dfrac{1}{3}$

Do đó: $$2r = \frac{1}{3}(h_a + h_b) \quad (3)$$

Mà: $$S = Dt(\Delta ABC) = pr = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b$$

Do đó: $h_a = \dfrac{2pr}{a}$ và $h_b = \dfrac{2pr}{b}$

Từ (3) ta có: $2r = \dfrac{2}{3}pr\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{3}p\left(\frac{a+b}{ab}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b}{ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} = \frac{a+b+c}{3}$$

BÀI TẬP

1. Cho ΔABC có ba cạnh là a, b, c. R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp ΔABC. Chứng minh:
   a/ $(a-b)\text{cotg}\frac{C}{2}+(b-c)\text{cotg}\frac{A}{2}+(c-a)\text{cotg}\frac{B}{2}=0$
   b/ $1+\frac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C$
   c/ Nếu $\text{cotg}\frac{A}{2},\text{cotg}\frac{B}{2},\text{cotg}\frac{C}{2}$ là cấp số cộng thì a, b, c cũng là cấp số cộng.
   d/ Diện tích $\Delta ABC = Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$
   e/ Nếu : $a^4=b^4+c^4$ thì ΔABC có 3 góc nhọn và $2\sin^2 A=\text{tg}B.\text{tg}C$
2. Nếu diện tích (ΔABC) = (c + a -b)(c + b -a) thì $\text{tg}C=\frac{8}{15}$
3. Cho ΔABC có ba góc nhọn. Gọi A', B', C' là chân các đường cao vẽ từ A, B, C. Gọi S, R, r lần lượt là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp ΔABC. Gọi S', R', r' lần lượt là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của $\Delta A'B'C'$. Chứng minh:
   a/ S' = 2ScosA.cosB.cosC
   b/ $R'=\frac{R}{2}$
   c/ r' = 2RcosA.cosB.cosC
4. ΔABC có ba cạnh a, b, c tạo một cấp số cộng. Với a < b < c
   Chứng minh :
   a/ ac = 6Rr
   b/ $\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}$
   c/ Công sai $d=\frac{3r}{2}\left(\text{tg}\frac{C}{2}-\text{tg}\frac{A}{2}\right)$
5. Cho ΔABC có ba góc A, B, C theo thứ tự tạo 1 cấp số nhân có công bội q = 2. Chứng minh:
   a/ $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$
   b/ $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=\frac{5}{4}$

CHƯƠNG XI:
NHẬN DẠNG TAM GIÁC

I. TÍNH CÁC GÓC CỦA TAM GIÁC

Bài 201: Tính các góc của ΔABC nếu :

$$\sin(B+C)+\sin(C+A)+\cos(A+B)=\frac{3}{2}\quad (*)$$

Do $\quad A+B+C=\pi$

Nên: $(*)\Leftrightarrow \sin A+\sin B-\cos C=\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\left(2\cos^2\frac{C}{2}-1\right)=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{C}{2}-4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+1-\cos^2\frac{A-B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+\sin^2\frac{A-B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos\frac{C}{2}=\cos\frac{A-B}{2}\\ \sin\frac{A-B}{2}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos\frac{C}{2}=\cos 0=1\\ \frac{A-B}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{C}{2}=\frac{\pi}{3}\\ A=B\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}A=B=\frac{\pi}{6}\\ C=\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

Bài 202: Tính các góc của ΔABC biết:

$$\cos 2A+\sqrt{3}(\cos 2B+\cos 2C)+\frac{5}{2}=0\quad (*)$$

Ta có: $(*)\Leftrightarrow 2\cos^2 A-1+2\sqrt{3}\left[\cos(B+C)\cos(B-C)\right]+\frac{5}{2}=0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 A - 4\sqrt{3}\cos A.\cos(B-C) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[2\cos A - \sqrt{3}\cos(B-C)\right]^2 + 3 - 3\cos^2(B-C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[2\cos A - \sqrt{3}\cos(B-C)\right]^2 + 3\sin^2(B-C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(B-C) = 0 \\ \cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(B-C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B - C = 0 \\ \cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 30^0 \\ B = C = 75^0 \end{cases}$$

Bài 203: Chứng minh ΔABC có $C = 120^0$ nếu :

$$\sin A + \sin B + \sin C - 2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2} = 2\sin\frac{C}{2} \ (*)$$

Ta có

$$(*) \Leftrightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A+B}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right] = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \quad \left(\text{do } \cos\frac{A}{2} > 0 \text{ và } \cos\frac{B}{2} > 0 \text{ vì } 0 < \frac{A}{2};\frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow C = 120^0$$

Bài 204: Tính các góc của ΔABC biết số đo 3 góc tạo cấp số cộng và $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

Không làm mất tính chất tổng quát của bài toán giả sử $A < B < C$

Ta có: A, B, C tạo 1 cấp số cộng nên A + C = 2B

Mà $A + B + C = \pi$ nên $B = \dfrac{\pi}{3}$

Lúc đó: $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin\frac{\pi}{3} + \sin C = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin C = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C-A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$$

Do C > A nên ΔABC có:

$$\begin{cases} \dfrac{C-A}{2} = \dfrac{\pi}{6} \\ C + A = \dfrac{2\pi}{3} \\ B = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \dfrac{\pi}{2} \\ A = \dfrac{\pi}{6} \\ B = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

<u>Bài 205:</u> Tính các góc của ΔABC nếu

$$\begin{cases} b^2 + c^2 \le a^2 & (1) \\ \sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

Áp dụng định lý hàm cosin: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Do (1): $b^2 + c^2 \le a^2$ nên $\cos A \le 0$

Do đó: $\dfrac{\pi}{2} \le A < \pi \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} \le \dfrac{A}{2} < \dfrac{\pi}{2}$

Vậy $\cos\dfrac{A}{2} \le \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (*)

Mặt khác: $\sin A + \sin B + \sin C = \sin A + 2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}$

$$= \sin A + 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\le 1 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 1 \quad \left(\text{do } (*) \text{ và } \cos\frac{B-C}{2} \le 1\right)$$

Mà $\sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2}$ do (2)

Dấu "=" tại (2) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = 1 \\ \cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\dfrac{B-C}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{\pi}{2} \\ B = C = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

<u>Bài 206</u>: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A, năm 2004)

Cho ΔABC không tù thỏa điều kiện

$\cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C = 3 \qquad (*)$

Tính ba góc của ΔABC

* **<u>Cách 1</u>**: Đặt $M = \cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C - 3$

Ta có: $M = 2\cos^2 A + 4\sqrt{2}\cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2} - 4$

$\Leftrightarrow \quad M = 2\cos^2 A + 4\sqrt{2}\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B-C}{2} - 4$

Do $\quad \sin\dfrac{A}{2} > 0$ và $\cos\dfrac{B-C}{2} \le 1$

Nên $\quad M \le 2\cos^2 A + 4\sqrt{2}\sin\dfrac{A}{2} - 4$

Mặt khác: ΔABC không tù nên $0 < A \le \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 0 \le \cos A \le 1$

$\Rightarrow \cos^2 A \le \cos A$

Do đó: $\quad M \le 2\cos A + 4\sqrt{2}\sin\dfrac{A}{2} - 4$

$\Leftrightarrow M \le \left(1 - 2\sin^2\dfrac{A}{2}\right) + 4\sqrt{2}\sin\dfrac{A}{2} - 4$

$\Leftrightarrow M \le -4\sin^2\dfrac{A}{2} + 4\sqrt{2}\sin\dfrac{A}{2} - 2$

$\Leftrightarrow M \le -2\left(\sqrt{2}\sin\dfrac{A}{2} - 1\right)^2 \le 0$

Do giả thiết (*) ta có M=0

Vậy: $\begin{cases} \cos^2 A = \cos A \\ \cos\dfrac{B-C}{2} = 1 \\ \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^0 \\ B = C = 45^0 \end{cases}$

* **<u>Cách 2</u>:** $(*) \Leftrightarrow \cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A + 2\sqrt{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^2 A - \cos A\right) + \cos A + 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos A\left(\cos A - 1\right) + \left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) + 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos A\left(\cos A - 1\right) - \left(\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right)^2 - \left(1 - \cos^2\frac{B-C}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos A\left(\cos A - 1\right) - \left(\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right)^2 - \sin^2\frac{B-C}{2} = 0 \ (*)$$

Do ΔABC không tù nên $\cos A \geq 0$ và $\cos A - 1 < 0$

Vậy vế trái của (*) luôn ≤ 0

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = 0 \\ \sqrt{2}\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B-C}{2} \\ \sin\frac{B-C}{2} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^0 \\ B = C = 45^0 \end{cases}$

Bài 207: Chứng minh ΔABC có ít nhất 1 góc 60^0 khi và chỉ khi

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \sqrt{3} \ (*)$$

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sin A - \sqrt{3}\cos A\right) + \left(\sin B - \sqrt{3}\cos B\right) + \left(\sin C - \sqrt{3}\cos C\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(A - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(B - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(C - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{A-B}{2} + \sin\left(C - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) - \frac{\pi}{3}\right]\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\left[-\cos\frac{A-B}{2} + \cos\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \vee \cos\frac{A-B}{2} = \cos\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{A+B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{C}{2} = \frac{\pi}{6} \vee \frac{A-B}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{A+B}{2} \vee \frac{-A+B}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{\pi}{3} \vee A = \frac{\pi}{3} \vee B = \frac{\pi}{3}$$

Bài 208: Cho ΔABC và $V = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 1$. Chứng minh:

a/ Nếu V = 0 thì ΔABC có một góc vuông

b/ Nếu V < 0 thì ΔABC có ba góc nhọn

c/ Nếu V > 0 thì ΔABC có một góc tù

Ta có: $V = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2B) + \cos^2 - 1$

$\Leftrightarrow V = \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C$

$\Leftrightarrow V = \cos(A + B).\cos(A - B) + \cos^2 C$

$\Leftrightarrow V = -\cos C.\cos(A - B) + \cos^2 C$

$\Leftrightarrow V = -\cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$

$\Leftrightarrow V = -2\cos C \cos A \cos B$

Do đó:

a/ $V = 0 \Leftrightarrow \cos A = 0 \vee \cos B = 0 \vee \cos C = 0$

$\Leftrightarrow \Delta ABC \perp$ tại A hay $\Delta ABC \perp$ tại B hay $\Delta ABC \perp$ tại C

b/ $V < 0 \Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos C > 0$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ có ba góc nhọn

(vì trong 1 tam giác không thể có nhiều hơn 1 góc tù nên không có trường hợp có 2 cos cùng âm)

c/ $V > 0 \Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos C < 0$

$\Leftrightarrow \cos A < 0 \vee \cos B < 0 \vee \cos C < 0$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ có 1 góc tù.

II. TAM GIÁC VUÔNG

Bài 209: Cho ΔABC có $\text{cotg}\frac{B}{2} = \frac{a + c}{b}$

Chứng minh ΔABC vuông

Ta có: $\text{cotg}\frac{B}{2} = \frac{a + c}{b}$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{2R\sin A + 2R\sin C}{2R\sin B} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{2\sin\frac{A + C}{2}.\cos\frac{A - C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{B}{2} = \cos\frac{B}{2}.\cos\frac{A - C}{2} \quad (\text{do } \sin\frac{B}{2} > 0)$$

$\Leftrightarrow \cos\frac{B}{2} = \cos\frac{A-C}{2}$ (do $\cos\frac{B}{2} > 0$)

$\Leftrightarrow \frac{B}{2} = \frac{A-C}{2} \vee \frac{B}{2} = \frac{C-A}{2}$

$\Leftrightarrow A = B + C \vee C = A + B$

$\Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} \vee C = \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow$ ΔABC vuông tại A hay ΔABC vuông tại C

Bài 210: Chứng minh ΔABC vuông tại A nếu

$$\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \sin C}$$

Ta có: $\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \sin C}$

$\Leftrightarrow \frac{2R\sin B}{\cos B} + \frac{2R\sin C}{\cos C} = \frac{2R\sin A}{\sin B \sin C}$

$\Leftrightarrow \frac{\sin B\cos C + \sin C\cos B}{\cos B.\cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C}$

$\Leftrightarrow \frac{\sin(B+C)}{\cos B.\cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C}$

$\Leftrightarrow \cos B\cos C = \sin B \sin C$ (do $\sin A > 0$)

$\Leftrightarrow \cos B.\cos C - \sin B.\sin C = 0$

$\Leftrightarrow \cos(B+C) = 0$

$\Leftrightarrow B + C = \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

Bài 211: Cho ΔABC có:

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \ (*)$$

Chứng minh ΔABC vuông

Ta có:

$(*) \Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right]\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right]\sin\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right]\cos\frac{C}{2} = 1 - \left[\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right]\sin\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2} = 1 - \sin^2\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2} = 1 - \sin^2\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}=\cos^2\frac{C}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}\left[\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}\right]=\cos\frac{A-B}{2}\left[\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}\right]\left[\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{C}{2}=\cos\frac{C}{2}\vee\cos\frac{C}{2}=\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{C}{2}=1\vee\frac{C}{2}=\frac{A-B}{2}\vee\frac{C}{2}=\frac{B-A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{C}{2}=\frac{\pi}{4}\vee A=B+C\vee B=A+C$$

$$\Leftrightarrow C=\frac{\pi}{2}\vee A=\frac{\pi}{2}\vee B=\frac{\pi}{2}$$

Bài 212: Chứng minh ΔABC vuông nếu:

$$3(\cos B+2\sin C)+4(\sin B+2\cos C)=15$$

Do bất đẳng thức Bunhiacốpki ta có:

$$3\cos B+4\sin B\le\sqrt{9+16}\sqrt{\cos^2 B+\sin^2 B}=15$$

và $6\sin C+8\cos C\le\sqrt{36+64}\sqrt{\sin^2 C+\cos^2 C}=10$

nên: $3(\cos B+2\sin C)+4(\sin B+2\cos C)\le 15$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\cos B}{3}=\dfrac{\sin B}{4}\\ \dfrac{\sin C}{6}=\dfrac{\cos C}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{tgB}=\dfrac{4}{3}\\ \text{cotgC}=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \text{tgB}=\text{cotgC}$

$\Leftrightarrow B+C=\dfrac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Bài 213: Cho ΔABC có: $\sin 2A+\sin 2B=4\sin A.\sin B$

Chứng minh ΔABC vuông.

Ta có: $\sin 2A+\sin 2B=4\sin A.\sin B$

$$\Leftrightarrow 2\sin(A+B)\cos(A-B)=-2\left[\cos(A+B)-\cos(A-B)\right]$$

$$\Leftrightarrow \cos(A+B)=\left[1-\sin(A+B)\right]\cos(A-B)$$

$$\Leftrightarrow -\cos C=\left[1-\sin C\right]\cos(A-B)$$

$$\Leftrightarrow -\cos C(1+\sin C)=(1-\sin^2 C).\cos(A-B)$$

$$\Leftrightarrow -\cos C(1+\sin C)=\cos^2 C.\cos(A-B)$$

$\Leftrightarrow \cos C=0$ hay $-(1+\sin C)=\cos C.\cos(A-B)$ (*)

$\Leftrightarrow \cos C=0$

(Do $\sin C>0$ nên $-(1+\sin C)<-1$

Mà $\cos C.\cos(A-B)\ge -1$. Vậy (*) vô nghiệm.)

Do đó ΔABC vuông tại C

III. TAM GIÁC CÂN

Bài 214: Chứng minh nếu ΔABC có $tgA + tgB = 2\cot g\frac{C}{2}$ thì là tam giác cân.

Ta có: $tgA + tgB = 2\cot g\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(A+B)}{\cos A.\cos B} = \frac{2\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin C}{\cos A.\cos B} = \frac{2\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos A\cos B} = \frac{2\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{C}{2} = \cos A.\cos B \quad \left(\text{do} \cos\frac{C}{2} > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-\cos C) = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos C = -\cos C + \cos(A-B)$$

$$\Leftrightarrow \cos(A-B) = 1$$

$$\Leftrightarrow A = B$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C.

Bài 215: Chứng minh ΔABC cân nếu:

$$\sin\frac{A}{2}.\cos^3\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}.\cos^3\frac{A}{2}$$

Ta có: $\sin\frac{A}{2}.\cos^3\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}.\cos^3\frac{A}{2}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right)\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}} = \left(\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\right)\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}$$

(do $\cos\frac{A}{2} > 0$ và $\cos\frac{B}{2} > 0$)

$$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{A}{2}\left(1+\text{tg}^2\frac{A}{2}\right)=\text{tg}\frac{B}{2}\left(1+\text{tg}^2\frac{B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}^3\frac{A}{2}-\text{tg}^3\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{A}{2}-\text{tg}\frac{B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\text{tg}\frac{A}{2}-\text{tg}\frac{B}{2}\right)\left[1+\text{tg}^2\frac{A}{2}+\text{tg}^2\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}\right]=0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{A}{2}=\text{tg}\frac{B}{2} \ \left(\text{ vì } 1+\text{tg}^2\frac{A}{2}+\text{tg}^2\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}>0\right)$$

$\Leftrightarrow A = B$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C

Bài 216: Chứng minh ΔABC cân nếu:

$$\frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}\left(\text{cotg}^2A+\text{cotg}^2B\right) \ (*)$$

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}-2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}+1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 A\sin^2 B=\left(\sin^2 A+\sin^2 B\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 0=\left(\sin^2 A-\sin^2 B\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin A=\sin B$$

Vậy ΔABC cân tại C

Bài 217: Chứng minh ΔABC cân nếu:

$$a+b=\text{tg}\frac{C}{2}\left(a\text{tg}A+b\text{tg}B\right) \ (*)$$

Ta có: $a+b=\text{tg}\frac{C}{2}\left(a\text{tg}A+b\text{tg}B\right)$

$$\Leftrightarrow (a+b)\text{cotg}\frac{C}{2}=a\text{tg}A+b\text{tg}B$$

$$\Leftrightarrow a\left[\text{tg}A-\text{cotg}\frac{C}{2}\right]+b\left[\text{tg}B-\text{cotg}\frac{C}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow a\left[\text{tg}A-\text{tg}\frac{A+B}{2}\right]+b\left[\text{tg}B-\text{tg}\frac{A+B}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A.\cos\frac{A+B}{2}}+\frac{b\sin\frac{B-A}{2}}{\cos B.\cos\frac{A+B}{2}}=0$$

$\Leftrightarrow \sin\frac{A-B}{2}=0$ hay $\frac{a}{\cos A}-\frac{b}{\cos B}=0$

$\Leftrightarrow A=B$ hay $\frac{2R\sin A}{\cos A}=\frac{2R\sin B}{\cos B}$

$\Leftrightarrow A=B$ hay $tgA=tgB \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C

IV. NHẬN DẠNG TAM GIÁC

Bài 218: Cho ΔABC thỏa: $a\cos B-b\cos A=a\sin A-b\sin B$ (*)
Chứng minh ΔABC vuông hay cân

Do định lý hàm sin: $a=2R\sin A, b=2R\sin B$

Nên (*) $\Leftrightarrow 2R\sin A\cos B-2R\sin B\cos A=2R\left(\sin^2 A-\sin^2 B\right)$

$\Leftrightarrow \sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin^2 A-\sin^2 B$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=\frac{1}{2}(1-\cos 2A)-\frac{1}{2}(1-\cos 2B)$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=\frac{1}{2}[\cos 2B-\cos 2A]$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=-[\sin(A+B)\sin(B-A)]$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)[1-\sin(A+B)]=0$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=0\vee\sin(A+B)=1$

$\Leftrightarrow A=B\vee A+B=\frac{\pi}{2}$

vậy ΔABC vuông hay cân tại C

Cách khác

$\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin^2 A-\sin^2 B$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=(\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B)$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2})(2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2})$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=\sin(A+B)\sin(A-B)$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=0\vee\sin(A+B)=1$

$\Leftrightarrow A=B\vee A+B=\frac{\pi}{2}$

Bài 219 ΔABC là tam giác gì nếu
$\left(a^2+b^2\right)\sin(A-B)=\left(a^2-b^2\right)\sin(A+B)$ (*)

Ta có: (*)

$\Leftrightarrow \left(4R^2\sin^2 A+4R^2\sin^2 B\right)\sin(A-B)=4R^2\left(\sin^2 A-\sin^2 B\right)\sin(A+B)$

$\Leftrightarrow \sin^2 A[\sin(A-B)-\sin(A+B)]+\sin^2 B[\sin(A-B)+\sin(A+B)]=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 A\cos A\sin(-B)+2\sin^2 B\sin A\cos B=0$

$\Leftrightarrow -\sin A\cos A + \sin B\cos B = 0$ (do $\sin A > 0$ và $\sin B > 0$)
$\Leftrightarrow \sin 2A = \sin 2B$
$\Leftrightarrow 2A = 2B \vee 2A = \pi - 2B$
$\Leftrightarrow A = B \vee A + B = \dfrac{\pi}{2}$
Vậy ΔABC cân tại C hay ΔABC vuông tại C.

Bài 220: ΔABC là tam giác gì nếu:
$$\begin{cases} a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = 4ab\cos A\sin B & (1) \\ \sin 2A + \sin 2B = 4\sin A\sin B & (2) \end{cases}$$

Ta có:
(1) $\Leftrightarrow 4R^2\sin^2 A\sin 2B + 4R^2\sin^2 B\sin 2A = 16R^2\sin A\sin^2 B\cos A$
$\Leftrightarrow \sin^2 A\sin 2B + \sin^2 B\sin 2A = 4\sin A\sin^2 B\cos A$
$\Leftrightarrow 2\sin^2 A\sin B\cos B + 2\sin A\cos A\sin^2 B = 4\sin A\sin^2 B\cos A$
$\Leftrightarrow \sin A\cos B + \sin B\cos A = 2\sin B\cos A$ (do $\sin A > 0, \sin B > 0$)
$\Leftrightarrow \sin A\cos B - \sin B\cos A = 0$
$\Leftrightarrow \sin(A - B) = 0$
$\Leftrightarrow A = B$
Thay vào (2) ta được
$\sin 2A = 2\sin^2 A$
$\Leftrightarrow 2\sin A\cos A = 2\sin^2 A$
$\Leftrightarrow \cos A = \sin A$ $(\text{do} \sin A > 0)$
$\Leftrightarrow \text{tg}A = 1$
$\Leftrightarrow A = \dfrac{\pi}{4}$
Do đó ΔABC vuông cân tại C

V. TAM GIÁC ĐỀU

Bài 221: Chứng minh ΔABC đều nếu:
$$bc\sqrt{3} = R\left[2(b + c) - a\right] \quad (*)$$

Ta có:(*) $\Leftrightarrow (2R\sin B)(2R\sin C)\sqrt{3} = R\left[2(2R\sin B + 2R\sin C) - 2R\sin A\right]$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin B\sin C = 2(\sin B + \sin C) - \sin(B + C)$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin B\sin C = 2(\sin B + \sin C) - \sin B\cos C - \sin C\cos B$
$$\Leftrightarrow 2\sin B\left[1 - \frac{1}{2}\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right] + 2\sin C\left[1 - \frac{1}{2}\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin B\left[1 - \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right)\right] + \sin C\left[1 - \cos\left(B - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0 \quad (1)$$

Do $\sin B > 0$ và $1 - \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$

$\sin C > 0$ và $1 - \cos\left(B - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$

Nên vế trái của (1) luôn ≥ 0

Do đó, (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \\ \cos\left(B - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow C = B = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài 222: Chứng minh ΔABC đều nếu $\begin{cases} \sin B \sin C = \frac{3}{4} & (1) \\ a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} & (2) \end{cases}$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow a^3 - a^2b - a^2c = a^3 - b^3 - c^3$

$\Leftrightarrow a^2(b + c) = b^3 + c^3$

$\Leftrightarrow a^2(b + c) = (b + c)(b^2 - bc + c^2)$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 - bc + c^2$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - bc$ (do đl hàm cosin)

$\Leftrightarrow 2bc\cos A = bc$

$\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{3}$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 4\sin B \sin C = 3$

$\Leftrightarrow 2\left[\cos(B - C) - \cos(B + C)\right] = 3$

$\Leftrightarrow 2\left[\cos(B - C) + \cos A\right] = 3$

$\Leftrightarrow 2\cos(B - C) + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \quad \left(\text{do (1) ta có } A = \frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \cos(B - C) = 1 \Leftrightarrow B = C$

Vậy từ (1), (2) ta có ΔABC đều

Bài 223: Chứng minh ΔABC đều nếu:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$$

Ta có: $\sin 2A + \sin 2B = 2\sin(A + B)\cos(A - B)$

$= 2\sin C\cos(A - B) \leq 2\sin C$ (1)

Dấu "=" xảy ra khi: $\cos(A - B) = 1$

Tương tự: $\sin 2A + \sin 2C \leq 2\sin B$ (2)

Dấu "=" xảy ra khi: $\cos(A-C)=1$

Tương tự: $\sin 2B+\sin 2C\le 2\sin A$ (3)

Dấu "=" xảy ra khi: $\cos(B-C)=1$

Từ (1) (2) (3) ta có: $2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)\le 2(\sin C+\sin B+\sin A)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\cos(A-B)=1\\ \cos(A-C)=1\\ \cos(B-C)=1\end{cases} \Leftrightarrow A=B=C$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Bài 224: Cho ΔABC có:

$$\frac{1}{\sin^2 2A}+\frac{1}{\sin^2 2B}+\frac{1}{\sin^2 C}=\frac{1}{2\cos A\cos B\cos C}\ (*)$$

Chứng minh ΔABC đều

Ta có: $(*)\Leftrightarrow \sin^2 2B.\sin^2 2C+\sin^2 2A\sin^2 2C+\sin^2 2A\sin^2 2B$

$=\dfrac{\sin 2A.\sin 2B.\sin 2C}{2\cos A\cos B\cos C}\cdot(\sin 2A\sin 2B\sin 2C)$

$=4\sin A\sin B\sin C(\sin 2A\sin 2B\sin 2C)$

Mà: $4\sin A\sin B\sin C=2\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]\sin(A+B)$

$=2\left[\cos(A-B)+\cos C\right]\sin C$

$=2\sin C\cos C+2\cos(A-B)\sin(A+B)$

$=\sin 2C+\sin 2A+\sin 2B$

Do đó,với điều kiện ΔABC không vuông ta có

$(*)\Leftrightarrow \sin^2 2B\sin^2 2C+\sin^2 2A\sin^2 2C+\sin^2 2A\sin^2 2B$

$=\sin 2A.\sin 2B.\sin 2C(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$

$=\sin^2 2A\sin 2B\sin 2C+\sin^2 2B\sin 2A\sin 2C+\sin^2 2C\sin 2A\sin 2B$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(\sin 2B\sin 2A-\sin 2B\sin 2C)^2+\dfrac{1}{2}(\sin 2A\sin 2B-\sin 2A\sin 2C)^2$

$+\dfrac{1}{2}(\sin 2C\sin 2A-\sin 2C\sin 2B)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2B\sin 2A=\sin 2B\sin 2C\\ \sin 2A\sin 2B=\sin 2A\sin 2C\\ \sin 2A\sin 2C=\sin 2C\sin 2B\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2A=\sin 2B\\ \sin 2B=\sin 2C\end{cases}\Leftrightarrow A=B=C\Leftrightarrow ABC$ đều

Bài 225: Chứng minh ΔABC đều nếu:

$$\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{a\sin B+b\sin C+c\sin A}=\frac{2p}{9R}\ (*)$$

Ta có: $a\cos A + b\cos B + c\cos C$

$$= 2R\sin A\cos A + 2R\sin B\cos B + 2R\sin C\cos C$$

$$= R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

$$= R[2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C]$$

$$= 2R\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)] = 4R\sin C\sin A\sin B$$

Cách 1: $a\sin B + b\sin C + c\sin A$

$$= 2R(\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A)$$

$$\geq 2R\sqrt[3]{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C} \text{ (do bđt Cauchy)}$$

Do đó vế trái : $\dfrac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin B + b\sin C + c\sin A} \leq \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}$ (1)

Mà vế phải: $\dfrac{2p}{9R} = \dfrac{a+b+c}{9R} = \dfrac{2}{9}(\sin A + \sin B + \sin C)$

$\geq \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có

(*) $\Leftrightarrow \sin A = \sin B = \sin C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Cách 2: Ta có: (*) $\Leftrightarrow \dfrac{4R\sin A\sin B\sin C}{a\sin B + b\sin C + c\sin A} = \dfrac{a+b+c}{9R}$

$$\Leftrightarrow \frac{4R\left(\frac{a}{2R}\right)\left(\frac{b}{2R}\right)\left(\frac{c}{2R}\right)}{a\left(\frac{b}{2R}\right) + b\left(\frac{c}{2R}\right) + \frac{ca}{2R}} = \frac{a+b+c}{9R}$$

$$\Leftrightarrow 9abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Do bất đẳng thức Cauchy ta có

$a + b + c \geq \sqrt[3]{abc}$

$ab + bc + ca \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

Do đó: $(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

<u>Bài 226</u>: Chứng minh ΔABC đều nếu

$$\cot gA + \cot gB + \cot gC = tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} (*)$$

Ta có: $\cot gA + \cot gB = \dfrac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B} = \dfrac{\sin C}{\sin A\sin B}$

$$\geq \frac{\sin C}{\left(\frac{\sin A + \sin B}{2}\right)^2} \text{ (do bđt Cauchy)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{A+B}{2}.\cos^2\frac{A-B}{2}} = \frac{2\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}}$$

$$\ge 2\text{tg}\frac{C}{2} \qquad (1)$$

Tương tự: $\cot gA + \cot gC \ge 2\text{tg}\frac{B}{2}$ (2)

$\cot gB + \cot gC \ge 2\text{tg}\frac{A}{2}$ (3)

Từ (1) (2) (3) ta có

$$2(\cot gA + \cot gB + \cot gC) \ge 2\left(\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}\right)$$

Do đó dấu "=" tại (*) xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{A-B}{2} = \cos\frac{A-C}{2} = \cos\frac{B-C}{2} = 1 \\ \sin A = \sin B = \sin C \end{cases}$$

$\Leftrightarrow A = B = C$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

BÀI TẬP

1. Tính các góc của ΔABC biết:

   a/ $\cos A = \sin B + \sin C - \frac{3}{2}$ (ĐS: $B = C = \frac{\pi}{6}, A = \frac{2\pi}{3}$)

   b/ $\sin 6A + \sin 6B + \sin 6C = 0$ (ĐS: $A = B = C = \frac{\pi}{3}$)

   c/ $\sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0$

2. Tính góc C của ΔABC biết:

   a/ $(1 + \cot gA)(1 + \cot gB) = 2$

   b/ $\begin{cases} A, B \text{ nhọn} \\ \sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt[9]{\sin C} \end{cases}$

3. Cho ΔABC có: $\begin{cases} \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1 \\ \sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0 \end{cases}$

   Chứng minh Δ có ít nhất một góc 36^0.

4. Biết $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = m$. Chứng minh

   a/ $m = 2$ thì ΔABC vuông

   b/ $m > 2$ thì ΔABC nhọn

   c/ $m < 2$ thì ΔABC tù.

5. Chứng minh ΔABC vuông nếu:

   a/ $\cos B + \cos C = \frac{b+c}{a}$

   b/ $\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \sin C}$

c/ $\sin A + \sin B + \sin C = 1 - \cos A + \cos B + \cos C$

d/ $\dfrac{(b-c)^2}{b^2} = \dfrac{2\left[1-\cos(B-C)\right]}{1-\cos 2B}$

6. Chứng minh ΔABC cân nếu:

a/ $\dfrac{1+\cos B}{\sin B} = \dfrac{2a+c}{\sqrt{a^2-c^2}}$

b/ $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cot g\dfrac{A}{2}.\cot g\dfrac{B}{2}$

c/ $tgA + 2tgB = tgA.tg^2B$

d/ $a\left(\cot g\dfrac{C}{2} - tgA\right) = b\left(tgB - \cot g\dfrac{C}{2}\right)$

e/ $(p-b)\cot g\dfrac{C}{2} = ptg\dfrac{B}{2}$

f/ $a + b = tg\dfrac{C}{2}(atgA + btgB)$

7. ΔABC là Δ gì nếu:

a/ $atgB + btgA = (a+b)tg\dfrac{A+B}{2}$

b/ $c = c\cos 2B + b\sin 2B$

c/ $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$

d/ $4S = (a+b-c)(a+c-b)$

8. Chứng minh ΔABC đều nếu

a/ $2(a\cos A + b\cos B + c\cos C) = a + b + c$

b/ $3S = 2R^2\left(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C\right)$

c/ $\sin A + \sin B + \sin C = 4\sin A\sin B\sin C$

d/ $m_a + m_b + m_c = \dfrac{9R}{2}$ với m_a, m_b, m_c là 3 đường trung tuyến